全国大学生
数学竞赛
提高课程

03

第九章 重积分

中国大学MOOC



内容

01 三重积分的计算方法

中国大学MOOC

三重积分的计算方法

定义

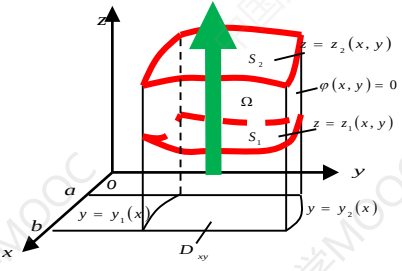
设$f(x,y,z)$是空间有界闭区域Ω上的有界函数，将Ω任意分成n个小闭子区域$\Delta V_1,\Delta V_2,\cdots,\Delta V_n$，其中$\Delta V_i$表示第$i$个小区域，也表示它的体积，在每个子区域$\Delta V_i$上，任取一点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$，作乘积$f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$$(i=1,2,\cdots n)$，并作和$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$，如果当各小闭区域直径中的最大值$\lambda$趋于零时，和式的极限总存在，则称此极限值为函数$f(x,y,z)$在闭区域$\Omega$上的三重积分.

即
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$$

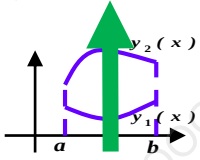
三重积分的计算方法

1.空间直角坐标系下化三重积分为三次积分计算

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$



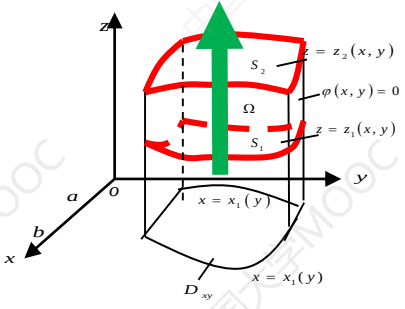
$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

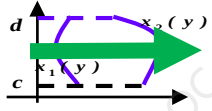


X 型区域

三重积分的计算方法

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \int_{c}^{d}\mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}\mathrm{d}x\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$





Y 型区域

三重积分的计算方法

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \int_{e}^{f}\mathrm{d}z\int_{y_1(z)}^{y_2(z)}\mathrm{d}y\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \int_{c}^{d}\mathrm{d}y\int_{z_1(y)}^{z_2(y)}\mathrm{d}z\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x$$

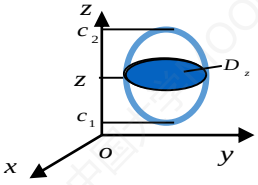
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \int_{a}^{b}\mathrm{d}x\int_{z_1(x)}^{z_2(x)}\mathrm{d}z\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \int_{e}^{f}\mathrm{d}z\int_{x_1(z)}^{x_2(z)}\mathrm{d}x\int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y$$



2. 先二后一法计算三重积分

计算 $\iiint_{\Omega} f(z)\mathrm{d}V$　(1) 把 Ω 向 z 轴投影，得投影区间 $[c_1, c_2]$.



(2) 对 $z \in [c_1, c_2]$ 用平行于 xOy 平面的平面 $z = z$ 去截 Ω，

得截面 D_z，计算 $\iint_{D_z} f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其结果为 z 的函数 $F(z)$.

(3) 最后计算定积分 $\int_{c_1}^{c_2} F(z)\mathrm{d}z$ 即得三重积分.

$$\iiint_{\Omega} f(z)\mathrm{d}V = \int_{c_1}^{c_2} f(z)\mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \iiint_{\Omega} f(x^2+y^2)\mathrm{d}V = \int_{c_1}^{c_2} \mathrm{d}z \iint_{D_z} f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

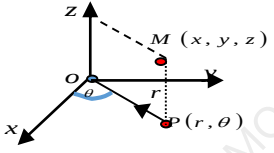
注　当 D_z 比较简单或被积函数为 $f(z)$、$f(x^2+y^2)$ 时，先二后一法简便.

三重积分的计算方法

3. 柱面坐标系下化三重积分为三次积分计算

柱面坐标系 在平面上建立了极坐标系之后，过极点再在三维空间作垂直于该坐标平面、且原点与极点重合的z轴，z轴的正方向规定为：当观察者从z轴正方向俯视极坐标平面时，从极轴开始，逆时针方向就是极角的正向，这就构成了一个空间柱面坐标系.

设$M(x,y,z)$为空间直角坐标系内的一点，它在xOy平面上的投影点为$P(r,\theta)$，则(r,θ,z)称为点M的柱面坐标.



r,θ,z的变化范围为 $0 \le r < +\infty$， $0 \le \theta < 2\pi$， $-\infty < z < +\infty$

三重积分的计算方法

空间点的直角坐标(x,y,z)与柱坐标(r,θ,z)的关系：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z \end{cases}$$

柱面坐标系下的体积元素为$\mathrm{d}V = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$,

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r\mathrm{d}r\int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\mathrm{d}z$$

4. 球面坐标系下化三重积分为三次积分计算

在地球上，某地的地理位置可以用经度、维度和海拔高度来表示. 在数学上可采用类似方法来表示空间点的位置. 这种表示空间点位置的方法称为球面坐标系.

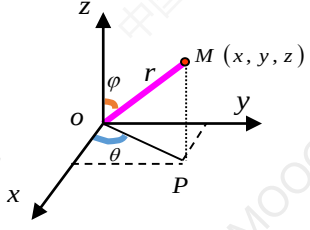
设$M(x,y,z)$为空间直角坐标系中的一点，点M位置可用三个有序数r,φ,θ确定

r是点M到原点O的距离；

φ是有向线段$\overrightarrow{OM}$与z轴正向的夹角；

设P为点M在xOy平面上的投影点，则θ是从z轴正向看，由x轴正向逆时针旋转到有向线段$\overrightarrow{OP}$的转角.

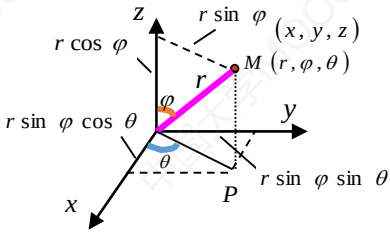
这样的三个参数(r,θ,φ)称为点M的球面坐标.



三重积分的计算方法

直角坐标系中的点与球面坐标系中的点之间的关系

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$



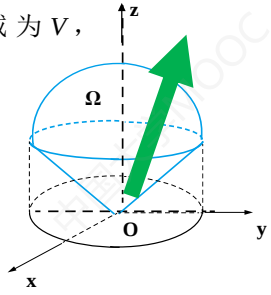
球面坐标系中的体积元素

$$\mathrm{d}V = r^2\sin\varphi\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\,r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

三重积分的计算方法

例1　记曲面 $z^2 = x^2 + y^2$ 和 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 围成空间区域为 V，则三重积分 $\iiint_V z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$ _____.



解　使用球面坐标计算

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2} r\cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\pi/4} \cdot \frac{1}{4}r^4\Big|_0^2 = 2\pi$$

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$$\mathrm{d}V = r^2\sin\varphi\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

三重积分的计算方法

例2　计算三重积分 $\iiint_{\Omega}\frac{xyz}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$是由曲面$(x^2+y^2+z^2)^2=2xy$围成的区域在第一卦限部分.

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$$\mathrm{d}V = r^2\sin\varphi\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

分析　$(x^2+y^2+z^2)^2=2xy$ 令 $z=0$ 得 $(x^2+y^2)^2=2xy$

$$\Rightarrow r^4=2r^2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow r^2=\sin 2\theta\geq 0 \Rightarrow 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$$

$$r^4=2r\sin\varphi\cos\theta\cdot r\sin\varphi\sin\theta$$

$$\Rightarrow r^2=2\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta \Rightarrow r=\sqrt{2}\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}$$

解　$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}\frac{r^3\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta\cos\varphi}{r^2\sin^2\varphi}\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

三、球面坐标系下计算三重积分

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}} r^3\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}r$$

计算 $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{xyz}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}} r^3\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\theta\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\theta\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3 2\theta\,\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\,\mathrm{d}(\sin\varphi)=\frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,\mathrm{d}t\cdot\frac{1}{6}\sin^6\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{96}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 t-1)\mathrm{d}\cos t=\frac{1}{96}\cdot\left(\frac{1}{3}\cos^3 t-\cos t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{96}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{144}.$$

例3　设l是过原点、方向为$\{\alpha,\beta,\gamma\}$(其中$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$)的直线，均匀椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$(其中$0<c<b<a$，密度为1)绕$l$旋转，求其转动惯量.

解　(1)由转动惯量的定义 $J_l=\iiint_\Omega d^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

设旋转轴l的方向向量为$\vec{\boldsymbol{l}}=\{\alpha,\beta,\gamma\}$，椭球内任意一点$P(x,y,z)$的径向量为$\vec{\boldsymbol{r}}$，则点$P$到旋转轴$l$的距离平方为

$$d^2=\vec{\boldsymbol{r}}^2-(\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{l}})^2=x^2+y^2+z^2-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2$$

$$=(1-\alpha^2)x^2+(1-\beta^2)y^2+(1-\gamma^2)z^2-2\alpha\beta xy-2\beta\gamma yz-2\alpha\gamma xz.$$

三重积分的计算方法

求转动惯量.

$$J_l = \iiint_{\Omega} \left[(1-\alpha^2)x^2 + (1-\beta^2)y^2 + (1-\gamma^2)z^2 - 2\alpha\beta xy - 2\beta\gamma yz - 2\alpha\gamma xz \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

由积分区域的对称性可知

$$\iiint_{\Omega} (2\alpha\beta xy + 2\beta\gamma yz + 2\alpha\gamma xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0, \qquad \Omega = \left\{ (x,y,z) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1 \right\},$$

$$\iiint_{\Omega} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-a}^{a} x^2 \mathrm{d}x \iint_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1-\frac{x^2}{a^2}} \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_{-a}^{a} x^2 \cdot \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{4a^3bc\pi}{15},$$

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2} = 1$$

三重积分的计算方法

设l是过原点、方向为$\{\alpha,\beta,\gamma\}$(其中$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$)的直线，均匀椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$(其中$0<c<b<a$，密度为1)绕$l$旋转，求其转动惯量.

(或$\iiint\limits_{\Omega} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2}a^2r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta\cdot abcr^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{4a^3bc\pi}{15}$)

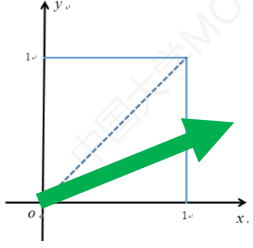
$$\iiint\limits_{\Omega} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4ab^3c\pi}{15},\qquad \iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4abc^3\pi}{15},$$

故 $$J_l=\iiint\limits_{\Omega} d^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4abc\pi}{15}\left[(1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2\right].$$

三重积分的计算方法

例 4　计算三重积分 $\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$，其中 $\Omega: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$.

解　$I=\int_0^1 \mathrm{d}z\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$，其中 $D: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1$



$=2\int_0^1 \mathrm{d}z\iint_{D_1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$，其中 $D_1: 0\le x\le 1, 0\le y\le x$

$=2\int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sec\theta}\frac{r\mathrm{d}r}{(1+z^2+r^2)^2}=\int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1+z^2}-\frac{1}{1+z^2+\sec^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta \quad -\frac{1}{1+z^2+r^2}\Big|_0^{\sec\theta}$

$=\int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+z^2}\mathrm{d}\theta-\int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+z^2+\sec^2\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^1\frac{1}{1+z^2}\mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta-J=\frac{\pi^2}{16}-J$

三重积分的计算方法

计算三重积分 $\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$，其中 $\Omega: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$.

$$I=\frac{\pi^2}{16}-\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+z^2+\sec^2\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi^2}{16}-J$$

改变积分次序

$$J=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+z^2+\sec^2\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{1+z^2+\sec^2\theta}\mathrm{d}z$$

作变量代换 $z=\tan t$,

改变积分次序

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 t}{\sec^2\theta+\sec^2 t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta+\sec^2 t}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta+\sec^2 t}\mathrm{d}t$$

$$2J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta+\sec^2 t}{\sec^2\theta+\sec^2 t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{16},\quad \text{从而 } J=\frac{\pi^2}{32}$$

所以 $I=\frac{\pi^2}{16}-J=\frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi^2}{32}=\frac{\pi^2}{32}$.



END

01 三重积分的计算方法

中国大学MOOC