全国大学生
数学竞赛
提高课程

02

第九章 重积分

中国大学MOOC



内容

01 二重积分综合运算

02 二重积分的应用

中国大学MOOC

四、二重积分综合运算

例1　设D是平面上由光滑封闭曲线围成的有界区域，其面积$A>0$，函数$f(x,y)$在该区域及边界上连续且$f(x,y)>0$.记$J_n=\left(\frac{1}{A}\iint\limits_D f^{\frac{1}{n}}(x,y)\mathrm{d}\sigma\right)^n$，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}J_n=$_____.

解　设$F(t)=\frac{1}{A}\iint\limits_D f^t(x,y)\mathrm{d}\sigma$，则

$$\lim_{n\to\infty}J_n=\lim_{t\to0^+}(F(t))^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to0^+}\mathrm{e}^{\frac{\ln F(t)}{t}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\ln F(t)}{t}}.$$

$$F(0)=\frac{1}{A}\iint\limits_D f^0(x,y)\mathrm{d}\sigma=1$$

又$\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\ln F(t)}{t}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\ln F(t)-\ln F(0)}{t-0}=[\ln F(t)]'\Big|_{t=0}=\frac{F'(0)}{F(0)}=F'(0)$,

故有$\lim\limits_{n\to\infty}J_n=\mathrm{e}^{F'(0)}$　　$F'(0)=?$

四、二重积分综合运算

记 $J_n=\left(\frac{1}{A}\iint_D f^{\frac{1}{n}}(x,y)\mathrm{d}\sigma\right)^n$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}J_n=$ _____.

$$F(t)=\frac{1}{A}\iint_D f^t(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

故有 $\lim\limits_{n\to\infty}J_n=\mathrm{e}^{F'(0)}$

$$F'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{F(0+t)-F(0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{A}\iint_D f^t(x,y)\mathrm{d}\sigma-\frac{1}{A}\iint_D f^0(x,y)\mathrm{d}\sigma}{t}=\frac{1}{A}\iint_D\left[\lim_{t\to 0}\frac{f^t(x,y)-f^0(x,y)}{t}\right]\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{1}{A}\iint_D\left[f^t(x,y)\right]'|_{t=0}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{A}\iint_D\left[f^t(x,y)\ln f(x,y)\right]|_{t=0}\mathrm{d}\sigma$$

$$\left(a^x\right)'=a^x\ln a$$

$$=\frac{1}{A}\iint_D\ln f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

故有 $\lim\limits_{n\to\infty}J_n=\mathrm{e}^{F'(0)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{A}\iint_D\ln f(x,y)\mathrm{d}\sigma}$.

四、二重积分综合运算

例 2　设 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$，$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中函数 $f(x,y)$ 在 D 上有连续的二阶偏导数.若对任何 x，y 有 $f(0,y)=f(x,0)=0$，且 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\le A$.

证明：$I\le\dfrac{A}{4}$.

$$\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=xf(x,y)\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x=f(1,y)-\int_0^1 x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x$$

证　$I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}(1-x)$

由分部积分法可得

$$\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}(1-x)=[f(x,y)(1-x)]\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1(1-x)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x=-\int_0^1(1-x)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x.$$

$$\therefore\quad I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(1-x)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x$$

四、二重积分综合运算

设 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$，$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中函数 $f(x,y)$ 在 D 上有连续的二阶偏导数.若对任何 x，y 有 $f(0,y)=f(x,0)=0$ 且 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\le A$. 证明：$I\le\dfrac{A}{4}$.

$I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1(1-x)\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x$ 交换积分次序后可得 $I=\int_0^1(1-x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}y$.

因为 $f(x,0)=0$，所以 $\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial x}=0$，从而 $(1-y)\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{y=0}^{y=1}=0$，

再由分部积分法得 $\int_0^1\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}y=-\int_0^1\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}(1-y)$

$$=-\left[(1-y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1(1-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}y\right]=\int_0^1(1-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}y$$

四、二重积分综合运算

证明：$I \le \dfrac{A}{4}$.

$$I = \int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}y$$

$$\int_0^1 \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (1-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,\mathrm{d}y$$

故 $$I = \int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 (1-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\mathrm{d}y = \iint_D (1-x)(1-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \le A$，且 $(1-x)(1-y)$ 在 D 上非负，

故 $$I \le A\iint_D (1-x)(1-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = A\int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 (1-y)\,\mathrm{d}y = \frac{A}{4}.$$

保序性　如果在闭区域 D 上，有 $f(x,y) \le g(x,y)$，则有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \quad ;$$

一、重积分在几何中的应用

体积

设Ω为空间有界闭区域，则Ω的体积为

$$V = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}V .$$

或 $$V = \iint_{D} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



中国大学MOOC

五、二重积分的应用

例1 曲面$z=x^2+y^2+1$在点$M(1,-1,3)$的切平面与曲面$z=x^2+y^2$所围区域的体积为_____.

解 曲面$z=x^2+y^2+1$在点$M(1,-1,3)$的切平面为

$$2(x-1)-2(y+1)-(z-3)=0,\quad 即\ z=2x-2y-1$$

联立$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=2x-2y-1 \end{cases}$ 得所围区域在xOy面上的投影D为

$$D=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+(y+1)^2\le 1\right\}.$$

所求体积为

$$V=\iint_D\left[(2x-2y-1)-(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}\sigma=\iint_D\left[1-(x-1)^2-(y+1)^2\right]\mathrm{d}\sigma.$$

五、二重积分的应用

曲面 $z = x^2 + y^2 + 1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 的切平面与曲面 $z = x^2 + y^2$ 所围区域的体积为_____.

所求体积为

$$V = \iint_D \left[(2x - 2y - 1) - (x^2 + y^2) \right] \mathrm{d}\sigma = \iint_D \left[1 - (x-1)^2 - (y+1)^2 \right] \mathrm{d}\sigma .$$

令 $x - 1 = r\cos t$，$y + 1 = r\sin t$，则 $\mathrm{d}\sigma = r\mathrm{d}t\mathrm{d}r$，$D: \begin{cases} 0 \le t \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$，

所以 $V = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \int_0^1 (1 - r^2) r \mathrm{d}r = \dfrac{\pi}{2}$

五、二重积分的应用

例2　设D为椭圆形$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1(a>b>0)$,面密度为$\rho$的均匀薄板；$l$为通过椭圆焦点$(-c,0)$(其中$c^2=a^2-b^2$)垂直于薄板的旋转轴.

(1)求薄板D绕l旋转的转动惯量J;

(2)对于固定的转动惯量，讨论椭圆薄板的面积是否有最大值和最小值.

解　(1) $J=\iint\limits_D[(c+x)^2+y^2]\rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　$I_z=\iint\limits_D(x^2+y^2)\rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\rho\iint\limits_D(c^2+2cx+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\rho\iint\limits_D 2cx\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\rho\iint\limits_D(c^2+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=0+2\rho\iint\limits_{D_1}(c^2+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　D_1为上半椭圆　　令$\begin{cases}x=ar\cos\theta\\ y=br\sin\theta\end{cases}$

$=2\rho\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(c^2+a^2r^2\cos^2\theta+b^2r^2\sin^2\theta)abt\,\mathrm{d}t$

$=2\rho[\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 c^2abr\mathrm{d}r+\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 a^2r^2\cos^2\theta abr\mathrm{d}r+\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 b^2r^2\sin^2\theta abr\mathrm{d}r]$

五、二重积分的应用

(1)求薄板D绕l旋转的转动惯量J;

$$J=2\rho\left[\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 c^2 abt\,\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 a^2t^2\cos^2\theta\, abt\,\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 b^2t^2\sin^2\theta\, abt\,\mathrm{d}t\right]$$

$$\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 c^2 abr\,\mathrm{d}r=abc^2\frac{\pi}{2}=ab(a^2-b^2)\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 a^2r^2\cos^2\theta\, abr\,\mathrm{d}r=\frac{a^3b}{8}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta=a^3b\frac{\pi}{8},$$

$$\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 b^2r^2\sin^2\theta\, abr\,\mathrm{d}r=\frac{ab^3}{8}\int_0^{\pi}(1-\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta=ab^3\frac{\pi}{8},$$

$$\therefore\quad J=\frac{ab\pi}{4}(5a^2-3b^2)\rho.$$

五、二重积分的应用

(1)求薄板D绕l旋转的转动惯量J;

(2)对于固定的转动惯量，讨论椭圆薄板的面积是否有最大值和最小值.

设J固定，$b(a)$是由$J=\dfrac{ab\pi\rho}{4}(5a^2-3b^2)$确定的隐函数，

(1) $J=\dfrac{ab\pi\rho}{4}(5a^2-3b^2)$.

方程$5a^3b-3ab^3=\dfrac{4J}{\pi\rho}$两端关于$a$求导：$15a^2b+5a^3b'(a)-3b^3-9ab^2b'(a)=0$

则 $b'(a)=\dfrac{3b^3-15a^2b}{5a^3-9ab^2}$.

对$S(a)=\pi ab(a)$求导，得

$$S'(a)=\pi\left[b(a)+ab'(a)\right]=\pi\left[b+a\cdot\frac{3b^3-15a^2b}{a(5a^2-9b^2)}\right]=-2\pi b\left(\frac{5a^2+3b^2}{5a^2-9b^2}\right).$$

当$b=\dfrac{\sqrt{5}}{3}a$时，$S'(a)$不存在；当$b<\dfrac{\sqrt{5}}{3}a$时，$S'(a)<0$；当$\dfrac{\sqrt{5}}{3}a<b\le a$时，$S'(a)>0$.

五、二重积分的应用

(1)求薄板D绕l旋转的转动惯量J;

(2)对于固定的转动惯量，讨论椭圆薄板的面积是否有最大值和最小值.

当$b=a$时，$a=(\frac{2J}{\rho\pi})^{\frac{1}{4}}$，$S=(\frac{2\pi J}{\rho})^{\frac{1}{2}}$；

$S=\pi ab$

当$b=\frac{\sqrt{5}}{3}a$时，$a=(\frac{18J}{5\sqrt{5}\rho\pi})^{\frac{1}{4}}$，$S=(\frac{2\pi J}{\sqrt{5}\rho})^{\frac{1}{2}}$.

$J=\frac{ab\pi\rho}{4}(5a^2-3b^2)$,

$$J=\frac{ab\pi\rho}{4}(5a^2-3b^2)=\frac{\pi\rho}{4}(5a^3b-3ab^3)\geq\frac{\pi\rho}{4}(5a^3b-3a^3b)=\frac{\pi\rho}{2}a^3b\Rightarrow b\leq\frac{2J}{\pi\rho}a^{-3}$$

当$a\to+\infty$时，$b=O(a^{-3})$，所以$\lim\limits_{a\to+\infty}S=0$.

故椭圆的面积不存在最大值和最小值，且$0<S<(\frac{2\pi J}{\rho})^{\frac{1}{2}}$.



END

01 二重积分综合运算

02 二重积分的应用

中国大学MOOC