全国大学生
数学竞赛
提高课程

01

第九章 重积分

中国大学MOOC



内容

01 二重积分的定义与性质

02 直角坐标系下计算二重积分

03 极坐标系下计算二重积分

中国大学MOOC

一、二重积分的定义与性质

二重积分的定义

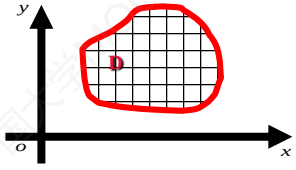
设$f(x,y)$是有界闭区域D上的有界函数，将闭区域D任意分成n个小区域$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$，其中$\Delta\sigma_i$表示第$i$个小区域，也表示其面积，在每个子区域$\Delta\sigma_i$上任取$(\xi_i,\eta_i)$，作乘积$f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，并作和$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，如果当各子区域的最大直径$\lambda$趋于零时，此和式极限存在，则称此极限为函数$f(x,y)$在闭区域$D$上的二重积分，即

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

一、二重积分的定义与性质

在直角坐标系中，$d\sigma = dxdy$，

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \iint_D f(x,y)\,dxdy.$$



曲顶柱体体积 $V = \iint_D f(x,y)\,d\sigma.$



一、二重积分的定义与性质

二重积分的几何意义

(1) 若$f(x,y)\geq 0$，则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$表示曲顶柱体体积；

(2) 若$f(x,y)\leq 0$，则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$表示曲顶柱体体积的负值；

(3) 若在D上既有$f(x,y)\geq 0$，也有$f(x,y)\leq 0$，

则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$表示这些部分区域上柱体体积的代数和.

二重积分存在的条件

若$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$必存在.

一、二重积分的定义与性质

线性性质

性质1 $\iint\limits_D k\,f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$，$k$为任意常数.

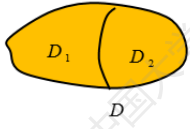
性质2 $\iint\limits_D \left[f(x,y)\pm g(x,y)\right]\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \pm \iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$

推广 $$\iint\limits_D \left[f_1(x,y)\pm f_2(x,y)\pm\cdots\pm f_n(x,y)\right]\mathrm{d}\sigma$$
$$= \iint\limits_D f_1(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \pm \iint\limits_D f_2(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \pm\cdots\pm \iint\limits_D f_n(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

可加性

性质3 若D可以分为两个闭区域D_1和D_2，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$



一、二重积分的定义与性质

性质4 如果在D上 $f(x,y)=1$，σ为D的面积，则

$$\iint_D 1\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D \mathrm{d}\sigma = \sigma.$$

保序性

性质5 如果在闭区域D上，有$f(x,y)\le g(x,y)$，则有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \quad ;$$

特别地，$$\left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint_D \left|f(x,y)\right|\mathrm{d}\sigma$$

保号性

推论 如果在D上，$f(x,y)\ge 0$，则 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \ge 0.$

一、二重积分的定义与性质

估值定理

性质6 若$f(x,y)$在有界闭区域D上的最大值为M，最小值为m，则有

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le M\sigma,$$ 其中σ为积分区域D的面积.

二重积分中值定理

性质7 设函数$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，σ为积分区域D的面积，则在D上至少存在一点(ξ,η)，使得 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma.$

中国大学MOOC

估值定理

性质 10.6 若$f(x,y)$在有界闭区域D上的最大值为M，最小值为m，则有

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le M\sigma,$$

其中σ为积分区域D的面积.

证　在D上恒有　$m \le f(x,y) \le M$，

则 $\iint_D m\,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D M\,\mathrm{d}\sigma,$

$$\iint_D m\,\mathrm{d}\sigma = m\iint_D \mathrm{d}\sigma = m\sigma, \quad \iint_D M\,\mathrm{d}\sigma = M\iint_D \mathrm{d}\sigma = M\sigma,$$

故 $m\sigma \le \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le M\sigma.$

一、二重积分的定义与性质

例1　设$f(x,y)$在$x^2+y^2\le 1$上有连续的二阶偏导数，$f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\le M$.

若$f(0,0)=0$，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，证明：$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\le\dfrac{\pi\sqrt{M}}{4}$.

二元函数$f(x,y)$的一阶麦克劳林公式

$$f(x,y)=f(0,0)+(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})f(0,0)+\frac{1}{2!}(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^2 f(\theta x,\theta y)$$

$$=\frac{1}{2}(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2})f(\theta x,\theta y),\quad \theta\in(0,1).$$

证　在$(0,0)$处展开$f(x,y)$得　$\theta\in(0,1)$

$$f(x,y)=\frac{1}{2}(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^2 f(\theta x,\theta y)=\frac{1}{2}(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2})f(\theta x,\theta y),$$

一、二重积分的定义与性质

设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\le 1$ 上有连续的二阶偏导数，$f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\le M$.

若 $f(0,0)=0$，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，证明：$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\le\dfrac{\pi\sqrt{M}}{4}$.

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(\theta x,\theta y)=\frac{1}{2}\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(\theta x,\theta y),$$

记 $(u,v,w)=\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(\theta x,\theta y)$，则 $f(x,y)=\dfrac{1}{2}(ux^2+2vxy+wy^2)$.

已知条件 $f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\le M\Leftrightarrow u^2+2v^2+w^2\le M$

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\{u,\sqrt{2}v,w\}\cdot\{x^2,\sqrt{2}xy,y^2\}$$

一、二重积分的定义与性质

证明：$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \le \dfrac{\pi\sqrt{M}}{4}.$

已知 $u^2+2v^2+w^2 \le M$

$f(x,y)=\dfrac{1}{2}(ux^2+2vxy+wy^2).$

由于 $\left|\{u,\sqrt{2}v,w\}\right| = \sqrt{u^2+2v^2+w^2} \le \sqrt{M}$，

以及 $\left|\{x^2,\sqrt{2}xy,y^2\}\right| = \sqrt{x^4+2x^2y^2+y^4} = x^2+y^2$，

于是有 $\left|\{u,\sqrt{2}v,w\}\cdot\{x^2,\sqrt{2}xy,y^2\}\right| \le \sqrt{M}(x^2+y^2)$，

即 $\left|f(x,y)\right| \le \dfrac{1}{2}\sqrt{M}(x^2+y^2)$，根据保序性，有

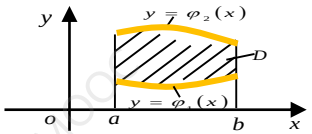
$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}$$

$$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left|f(x,y)\right|\mathrm{d}\sigma \le \left|\frac{1}{2}\sqrt{M}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| = \frac{\pi\sqrt{M}}{4}.$$

二、直角坐标系下计算二重积分

设$z = f(x, y) \geq 0$(非负连续函数)，底面闭区域D由连续曲线$y = \varphi_1(x)$，$y = \varphi_2(x)$及直线$x = a$，$x = b$围成.

二重积分$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$的几何意义是以$D$为底，以曲面$z = f(x, y)$为顶的曲顶柱体体积$V$.



X 型区域



二、直角坐标系下计算二重积分

曲顶柱体体积 $V = \int_a^b A(x)\,dx$,

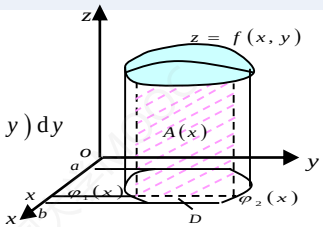
截面 $A(x)$ 是一个曲边梯形. $A(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$

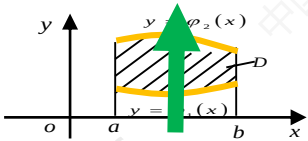
$$\therefore \quad V = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

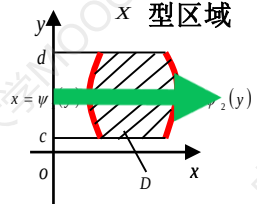
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$$

牢记公式





X 型区域

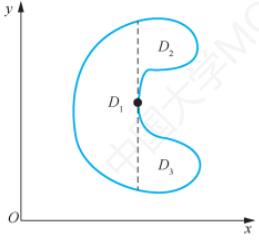


二、直角坐标系下计算二重积分

若D是混合型区域，则$D = D_1 + D_2 + D_3$

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_3} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



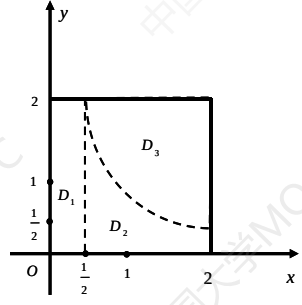
二、直角坐标系下计算二重积分

例1　求 $\iint\limits_D \operatorname{sgn}(xy-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$.

解　设 $D_1=\left\{(x,y)\middle| 0\le x\le \frac{1}{2}\ ,\ 0\le y\le 2\right\}$，$D_2=\left\{(x,y)\middle|\frac{1}{2}\le x\le 2\ ,\ 0\le y\le \frac{1}{x}\right\}$，

$$D_3=\left\{(x,y)\middle|\frac{1}{2}\le x\le 2\ ,\ \frac{1}{x}\le y\le 2\right\},$$

$$\iint\limits_{D_1\cup D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\times 2+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=1+2\ln 2,$$

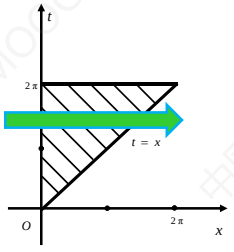


$$\iint\limits_{D_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(2-\frac{1}{2})\times 2-\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3-2\ln 2$$

$$\iint\limits_{D}\operatorname{sgn}(xy-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_1\cup D_2}(-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2-4\ln 2$$

二、直角坐标系下计算二重积分

例 2　计算积分 $\int_0^{2\pi} x\mathrm{d}x \int_x^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$



解法 1　交换积分次序

$$\text{原式} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t \int_0^t x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

二、直角坐标系下计算二重积分

计算 $\int_0^{2\pi} x\,\mathrm{d}x \int_x^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$

解法2 使用分部积分公式

令 $f(x)=\int_x^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$，则 $f'(x)=-\frac{\sin^2 x}{x^2}$，且 $f(2\pi)=0$.

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi} xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}\frac{x^2}{2}$$

$$=\frac{1}{2}x^2 f(x)\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x^2 f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x^2\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

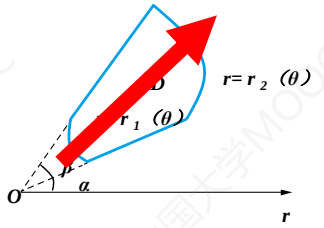
三、极坐标系下计算二重积分

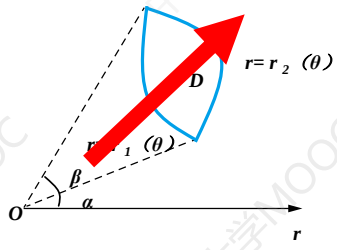
(1) 极点O不在积分区域内

区域 $\tilde{D}=\left\{(r,\theta)\middle|\alpha\le\theta\le\beta, r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta)\right\}$

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{\tilde{D}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r$$

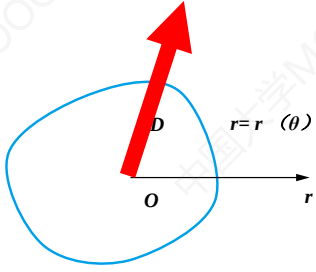




三、极坐标系下计算二重积分

(2) 极点O包含在积分区域的内部

区域 $\tilde{D}=\{(r,\theta)\,|\,0\le\theta\le 2\pi,0\le r\le r(\theta)\}$



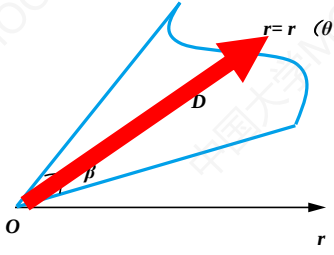
$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\iint_{\tilde{D}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr$$

三、极坐标系下计算二重积分

(3) 极点O位于积分区域的边界上

区域 $\tilde{D}=\left\{(r,\theta)\middle|\alpha\le\theta\le\beta,0\le r\le r(\theta)\right\}$



$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{\tilde{D}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r$$

三、极坐标系下计算二重积分

例1　设 $D{:}1 \le x^2 + y^2 \le 4$，则 $I = \iint\limits_D (x + y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2-4)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值是 _____.

解　先利用对称性，再在极坐标系下运算

$$I = \mathrm{e}^4\left[\iint\limits_D x\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_D y^2\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

$$= 0 + 4\mathrm{e}^4\iint\limits_{D_1} y^2\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad D_1{:}1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0$$

$$= 4\mathrm{e}^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^2\sin^2\theta\,\mathrm{e}^{-r^2}r\,\mathrm{d}r = 4\mathrm{e}^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^3\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$= 4\mathrm{e}^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\cdot\int_1^2 r^3\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}(2\mathrm{e}^3 - 5).$$

三、极坐标系下计算二重积分

例2　求二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left|x^2+y^2-x-y\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

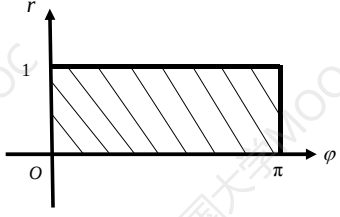
$$x^2+y^2-x-y$$
$$= r^2 - r\cos\varphi - r\sin\varphi$$
$$= r\left[r-(\cos\varphi+\sin\varphi)\right]$$
$$= r\left[r-\sqrt{2}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

解　由对称性，可以只考虑区域 $y \ge x$，

$$I = 2\int_{\pi/4}^{5\pi/4} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \left|r-\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right| r^2\mathrm{d}r$$

$$= 2\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \left|r-\sqrt{2}\cos\theta\right| r^2\mathrm{d}r \qquad \text{令 } \theta = \varphi - \frac{\pi}{4}$$

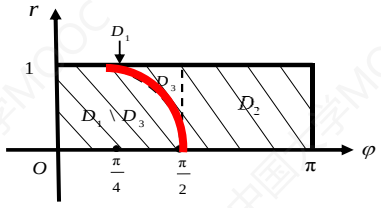
$$= 2\int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \left|r-\sqrt{2}\cos\varphi\right| r^2\mathrm{d}r.$$



(φ, r) 所在的区域为矩形：D ：$0 \le \varphi \le \pi$ ，$0 \le r \le 1$.

三、极坐标系下计算二重积分

求二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left|x^2+y^2-x-y\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$



$$I = 2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{1}\left|r-\sqrt{2}\cos\varphi\right| r^2\mathrm{d}r.$$

把 D 分解为 $D_1 \cup D_2$，

其中 D_1：$0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$，$0\le r\le 1$，$D_2$：$\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi$，$0\le r\le 1$.

D_3：$\dfrac{\pi}{4}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$，$\sqrt{2}\cos\varphi\le r\le 1$，这里 D_3 是 D_1 子集，

记 $I_k=\iint\limits_{D_i}\left|r-\sqrt{2}\cos\varphi\right| r^2\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$ $(k=1,2,3)$，则 $I=2(I_1+I_2)$

三、极坐标系下计算二重积分

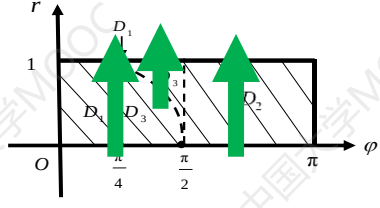
求二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left|x^2+y^2-x-y\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

注意到 $(r-\sqrt{2}\cos\varphi)r^2$ 在 $D_1\setminus D_3, D_2, D_3$ 的符号分别为负，正，正，则

$$I_3=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_{\sqrt{2}\cos\varphi}^{1}(r-\sqrt{2}\cos\varphi)\,r^2\mathrm{d}r=\frac{3\pi}{32}+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$I_1=\iint\limits_{D_1}(\sqrt{2}\cos\varphi-r)\,r^2\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r+2I_3=\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\pi}{8}+2I_3=\frac{\pi}{16}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$I_2=\iint\limits_{D_2}(r-\sqrt{2}\cos\varphi)\,r^2\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r=\frac{\pi}{8}+\frac{\sqrt{2}}{3}.$$



所以 $I=2\,(I_1+I_2)=1+\frac{3\pi}{8}.$



END

01 二重积分的定义与性质

02 直角坐标系下计算二重积分

03 极坐标系下计算二重积分

中国大学MOOC