全国大学生
数学竞赛
提高课程

03

第八章 多元函数微分学

中国大学MOOC



内容

06 空间曲面的切平面与法线

07 空间曲线的切线与法平面

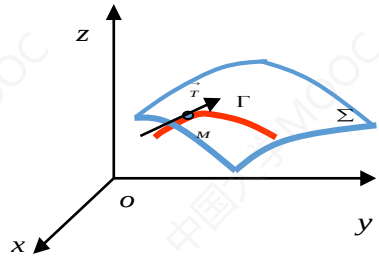
中国大学MOOC

六、空间曲面的切平面与法线

(1) 曲面以隐函数的形式给出

设空间曲面 Σ 的方程为 $F(x,y,z)=0$，

$M(x_0,y_0,z_0)$ 是曲面 Σ 上的一点.



过 M 的切平面方程为

$$F_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}$

六、空间曲面的切平面与法线

(2)曲面以显函数的形式给出 $\Sigma:\ z=f(x,y)$ $\qquad f(x,y)-z=0$

令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$，得

$$\frac{\partial F}{\partial x}=f_x'(x,y),\quad \frac{\partial F}{\partial y}=f_y'(x,y),\quad \frac{\partial F}{\partial z}=-1$$

曲面 Σ 在 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$

其法向向量 $\vec{n}=\{f_x'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0),-1\}$

六、空间曲面的切平面与法线

例1　过直线 $\begin{cases} 10x+2y-2z=27 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ 作曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面，求此切平面的方程.

解　设 $F(x,y,z)=3x^2+y^2-z^2-27$,

则曲面的法向量为　$\vec{n_1}=\{F_x',\ F_y',\ F_z'\}=2\{3x,y,-z\}$

过直线 $\begin{cases} 10x+2y-2z=27 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ 的平面束方程为

$10x+2y+-2z-27+\lambda(x+y-z)=0$

即 $(10+\lambda)x+(2+\lambda)y-(2+\lambda)z-27=0$.　法向量 $n_2=\{10+\lambda,\ 2+\lambda,-(2+\lambda)\}$.

七、空间曲面的切平面与法线

过直线 $\begin{cases} 10x+2y-2z=27 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ 作曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面，求此切平面的方程

设所求切点为 $P(x_0,y_0,z_0)$，则

$$\begin{cases} \dfrac{10+\lambda}{3x_0}=\dfrac{2+\lambda}{y_0}=\dfrac{2+\lambda}{z_0} \\ 3x_0^2+y_0^2-z_0^2=27 \\ (10+\lambda)\,x_0+(2+\lambda)\,y_0-(2+\lambda)\,z_0-27=0 \end{cases}$$

解得 $x_0=3$，$y_0=1$，$z_0=1$，$\lambda=-1$，或者 $x_0=-3$，$y_0=-17$，$z_0=-17$，$\lambda=-19$，

故所求切平面方程为

$$9x+y-z-27=0 \quad \text{或} \quad 9x+17y-17z+27=0.$$

六、空间曲面的切平面与法线

例 2　设 a，b，$\mu > 0$，曲面 $xyz = \mu$ 与曲面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 相切，则 $\mu =$ _____.

解　设两曲面在 $M(x, y, z)$ 相切，$F(x, y, z) = xyz - \mu$，$\{F_x', F_y', F_z'\} = \{yz, xz, xy\}$

$$G(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1,\ \{G'_x, G'_y, G'_z\} = \left\{\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right\},$$

由两曲面在 M 相切得 $yz = \dfrac{2x}{a^2}\lambda$，$xz = \dfrac{2y}{b^2}\lambda$，$xy = \dfrac{2z}{c^2}\lambda$.

$$\mu = xyz = x \cdot \frac{2x}{a^2}\lambda = 2\lambda\frac{x^2}{a^2} \quad ①$$

$$\mu = xyz = y \cdot \frac{2y}{b^2}\lambda = 2\lambda\frac{y^2}{b^2} \quad ②$$

$$\mu = xyz = \frac{2z}{c^2}\lambda \cdot z = 2\lambda\frac{z^2}{c^2} \quad ③$$

六、空间曲面的切平面与法线

设 a，b，$\mu>0$，曲面 $xyz=\mu$ 与曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 相切，则 $\mu=$ _____.

$\mu=2\lambda\dfrac{x^2}{a^2}$ ①　　$\mu=2\lambda\dfrac{y^2}{b^2}$ ②　　$\mu=2\lambda\dfrac{z^2}{c^2}$ ③

① × ② × ③ 得　$\mu^3=2\lambda\dfrac{x^2}{a^2}\cdot 2\lambda\dfrac{y^2}{b^2}\cdot 2\lambda\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{8\lambda^3}{a^2b^2c^2}(xyz)^2=\dfrac{8\lambda^3}{a^2b^2c^2}\mu^2$

$$\Rightarrow \mu=\frac{8\lambda^3}{a^2b^2c^2},$$

① + ② + ③ 得　$3\mu=2\lambda\dfrac{x^2}{a^2}+2\lambda\dfrac{y^2}{b^2}+2\lambda\dfrac{z^2}{c^2}=2\lambda\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)=2\lambda$

联立 $\begin{cases}\mu=\dfrac{8\lambda^3}{a^2b^2c^2},\\ 3\mu=2\lambda\end{cases}$，解得 $\mu=\dfrac{abc}{3\sqrt{3}}$.

六、空间曲面的切平面与法线

例3　设$f(u,v)$在全平面上有连续的偏导数，证明：曲面$f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$的所有切平面都交于点$(a,b,c)$.

证明　设$F(x,y,z)=f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)$，

$$F_x'=\frac{f_1}{z-c},\quad F_y'=\frac{f_2}{z-c},\quad F_z'=\frac{-(x-a)f_1-(y-b)f_2}{(z-c)^2}$$

取曲面的法向量　$n=\left\{(z-c)f_1',(z-c)f_2',-(x-a)f_1'-(y-b)f_2'\right\}$.

记(x,y,z)为曲面上的点，(X,Y,Z)为切平面上的点，

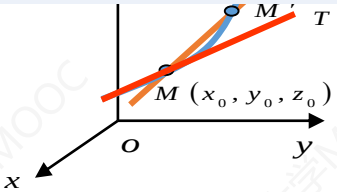
则曲面上过点(x,y,z)的切平面方程为

$$[(z-c)f_1](X-x)+[(z-c)f_2](Y-y)+[-(x-a)f_1-y-b)f_2)](Z-z)=0.$$

容易验证，对任意(x,y,z) $(z\neq c)$，$(X,Y,Z)=(a,b,c)$都满足上述切平面方程.

七、空间曲线的切线与法平面

(1) 设空间曲线 Γ 的参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}$ $(\alpha \le t \le \beta)$，且假定这三个函数均可导.



曲线 Γ 在点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线方程：$\dfrac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \dfrac{z - z_0}{\omega'(t_0)}$

$\vec{T} = \{\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0)\}$ 为切线 MT 的方向向量.

曲线 Γ 在点 M 处的法平面方程为

$$\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \omega'(t_0)(z - z_0) = 0$$

七、空间曲线的切线与法平面

(2) 如果空间曲线Γ的方程为 $\begin{cases} y=\psi(x) \\ z=\omega(x) \end{cases}$ (两柱面的交线)

取 x 为参数，曲线Γ的参数方程为 $\begin{cases} x=x \\ y=\psi(x) \\ z=\omega(x) \end{cases}$

Γ在点 $M(x_0, y_0, z_0)$ $(y_0=\psi(x_0),\ z_0=\omega(x_0))$ 的切线方程为：

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\psi'(x_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(x_0)} \quad ④$$

法平面方程为：$(x-x_0)+\psi'(y-y_0)+\omega'(x_0)(z-z_0)=0$ ⑤

七、空间曲线的切线与法平面

例　设$F(x,y,z)$和$G(x,y,z)$有连续偏导数，$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\neq 0$,曲线$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$过点$P_0(x_0,y_0,z_0)$. 记$\Gamma$在$xOy$平面上的投影曲线为$S$，求$S$上过点$(x_0,y_0)$的切线方程.

解　由两方程定义的曲面在$P_0(x_0,y_0,z_0)$的切平面分别为

$$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0,$$

$$G_x(P_0)(x-x_0)+G_y(P_0)(y-y_0)+G_z(P_0)(z-z_0)=0.$$

上述两切平面的交线就是Γ在P_0点的切线，该切线在xOy面上的投影就是S过(x_0,y_0)的切线，消去$z-z_0$得$(F_xG_z-G_xF_z)_{P_0}(x-x_0)+(F_yG_z-G_yF_z)_{P_0}(y-y_0)=0$,

这里$x-x_0$的系数是$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\neq 0$,故上式是一条直线的方程，就是所要求的切线.



END

06 空间曲面的切平面与法线

07 空间曲线的切线与法平面

中国大学MOOC