全国大学生
数学竞赛
提高课程

02

第八章 多元函数微分学

中国大学MOOC



第2讲

01 多元函数的无条件极值

02 条件极值

中国大学MOOC

四、多元函数的无条件极值

定义　设函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某邻域有定义，如果对该邻域内异于(x_0, y_0)的点(x, y)，恒有$f(x_0, y_0) > f(x, y)$(或$f(x_0, y_0) < f(x, y)$)成立，则称函数$f(x, y)$在点(x_0, y_0)取得极大值(或极小值)$f(x_0, y_0)$，并称点(x_0, y_0)为极大值点(或极小值点).

定理　可微函数取极值的必要条件

设可微函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)取得极值，则在该点处函数$z = f(x, y)$的偏导数均为0，即$f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$.

四、多元函数的无条件极值

驻点：称每个一阶偏导数皆为零的点为二元函数 $z = f(x, y)$ 的驻点。

$$f_x'(x_0, y_0) = 0,\ f_y'(x_0, y_0) = 0$$

二元函数的极值点是在驻点以及一阶偏导数不存在的点中取得。

如果三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 具有偏导数，则它在点 (x_0, y_0, z_0) 具有极值的必要条件为

$$f_x'(x_0, y_0, z_0) = 0 \qquad f_y'(x_0, y_0, z_0) = 0 \qquad f_z'(x_0, y_0, z_0) = 0$$

中国大学MOOC

四、多元函数的无条件极值

定理　极值存在的充分条件　设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内连续，有直到二阶的连续偏导数，又$f_x'(x_0,y_0)=0$，$f_y'(x_0,y_0)=0$

记$A=f_{xx}''(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}''(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}''(x_0,y_0)$

(1) 若$B^2-AC<0$，且$A>0$，则$f(x_0,y_0)$为极小值；

若$B^2-AC<0$，且$A<0$，则$f(x_0,y_0)$为极大值；

(2) 若$B^2-AC>0$，则$f(x_0,y_0)$不是极值；

(3) 若$B^2-AC=0$，无法判断.

中国大学MOOC

四、多元函数的无条件极值

例　设二元函数$f(x,y)$在平面上有连续的二阶偏导数. 对任何角度α，定义一元函数$g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)$，若对任何$\alpha$都有$\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$且$\dfrac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$. 证明$f(0,0)$是$f(x,y)$的极小值.

解　$$\frac{\mathrm{d}g_\alpha(t)}{\mathrm{d}t}=f_x'\cos\alpha+f_y'\sin\alpha=\left(f_x',f_y'\right)\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$$

由于$\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=\left(f_x',f_y'\right)_{(0,0)}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=0$对一切$\alpha$成立，

故$(f_x',f_y')_{(0,0)}=(0,0)$，即$(0,0)$是$f(x,y)$的驻点.

$$\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(t)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f_x'\cos\alpha+f_y'\sin\alpha\right)$$

四、多元函数的无条件极值

设二元函数$f(x,y)$在平面上有连续的二阶偏导数. 对任何角度α，定义一元函数$g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)$，若对任何$\alpha$都有$\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$且$\dfrac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$.

证明$f(0,0)$是$f(x,y)$的极小值.

$$\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(t)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f_x'\cos\alpha+f_y'\sin\alpha\right)$$

$$=\left(f_{xx}''\cos\alpha+f_{xy}''\sin\alpha\right)\cos\alpha+\left(f_{yx}''\cos\alpha+f_{yy}''\sin\alpha\right)\sin\alpha$$

$$=f_{xx}''\cos^2\alpha+2f_{xy}''\sin\alpha\cos\alpha+f_{yy}''\sin^2\alpha$$

$$=(\cos\alpha,\sin\alpha)\begin{pmatrix}f_{xx}'' & f_{xy}''\\ f_{xy}'' & f_{yy}''\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix},\qquad \text{记 } H_f(x,y)=\begin{pmatrix}f_{xx}'' & f_{xy}''\\ f_{xy}'' & f_{yy}''\end{pmatrix},$$

四、多元函数的无条件极值

设二元函数$f(x,y)$在平面上有连续的二阶偏导数. 对任何角度α，定义一元函数$g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)$，若对任何$\alpha$都有$\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$且$\dfrac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$.

证明$f(0,0)$是$f(x,y)$的极小值.

$$\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}=(\cos\alpha,\sin\alpha)H_f(0,0)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}>0$$

对任何单位向量$(\cos\alpha,\sin\alpha)$成立，故$H_f(0,0)$是一个正定阵，

$$\left|H_f(0,0)\right|=\begin{vmatrix}f_{xx}'' & f_{xy}''\\ f_{xy}'' & f_{yy}''\end{vmatrix}_{(0,0)}=AC-B^2>0,\qquad A=f_{xx}''(0,0)>0$$

故$f(0,0)$是$f(x,y)$的极小值.

五、条件极值

前面讨论的极值问题，自变量在函数的定义域内可以任意取值，没有任何限制，所以称为无条件极值。

在实际问题中，求极值(或最值)时，常常对自变量的取值附加一定的约束条件，这类对自变量取值附加约束条件的极值问题，称为条件极值问题。

在有些题目中条件极值问题可转化为无条件极值求解

中国大学MOOC

拉格朗日乘数法

求函数$z=f(x,y)$在附加条件$\varphi(x,y)=0$下的极值

(1) 构造辅助函数$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，其中$\lambda$为待定常数；

(2) 由无条件极值问题取极值的必要条件有

$$\begin{cases} L'_x=f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0 \\ L'_y=f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0 \\ L'_\lambda=\varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

由此解得可能的极值点(x,y);

(3) 判断求出的(x,y)是否为极值点，一般由问题的实际意义判定.

五、条件极值

拉格朗日乘数法可推广到自变量多于两个及等式约束条件多于一个的情况

拉格朗日乘数法

函数 $u = f(x, y, z)$ 在附加条件 $\varphi_1(x, y, z) = 0$，$\varphi_2(x, y, z) = 0$ 下的极值

构造辅助函数

$$F(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi_1(x, y, z) + \lambda_2 \varphi_2(x, y, z),$$

其中 λ_1、λ_2 为待定常数.



五、条件极值

例　设Σ_1: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, 其中$a>b>c>0$, Σ_2: $z^2=x^2+y^2$, Γ为Σ_1和Σ_2的交线.

求椭球面Σ_1在Γ上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值.

解　椭球面Σ_1上任意一点$P(x,y,z)$处的的切平面方程是

$$\frac{x}{a^2}(X-x)+\frac{y}{b^2}(Y-y)+\frac{z}{c^2}(Z-z)=0,$$

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

由$P(x,y,z)\in\Sigma_1$, 于是它到原点的距离

$$d(x,y,z)=\frac{\left|\frac{x}{a^2}(0-x)+\frac{y}{b^2}(0-y)+\frac{z}{c^2}(0-z)\right|}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}}=\frac{\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right|}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

五、条件极值

设 $\Sigma_1: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，其中 $a>b>c>0$，$\Sigma_2: z^2=x^2+y^2$，Γ 为 Σ_1 和 Σ_2 的交线. 求椭球面 Σ_1 在 Γ 上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值.

$$d(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}}.$$

作拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)+\mu(x^2+y^2-z^2),$$

$$F_x=2\left(\frac{1}{a^4}+\frac{\lambda}{a^2}+\mu\right)x \qquad F_y=2\left(\frac{1}{b^4}+\frac{\lambda}{b^2}+\mu\right)y \qquad F_z=2\left(\frac{1}{c^4}+\frac{\lambda}{c^2}-\mu\right)z$$

$$F_\lambda=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1 \qquad F_\mu=x^2+y^2-z^2$$

五、条件极值

$$d(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

令 $\begin{cases} F_x = 2(\frac{1}{a^4}+\frac{\lambda}{a^2}+\mu)x = 0 \\ F_y = 2(\frac{1}{b^4}+\frac{\lambda}{b^2}+\mu)y = 0 \\ F_z = 2(\frac{1}{c^4}+\frac{\lambda}{c^2}-\mu)z = 0 \\ F_\lambda = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1 = 0 \\ F_\mu = x^2+y^2-z^2 = 0 \end{cases}$，

由第一个方程得 $x=0$，

代入后两个方程得 $y=\pm z=\pm\dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$；

同理，由第二个方程得 $y=0$，

代入后两个方程得 $x=\pm z=\pm\dfrac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}$，

驻点：$(0,\dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}},\pm\dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}})$，

$(\dfrac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}},0,\pm\dfrac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}})$

$$\left.\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right|_{(0,\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}},\pm\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}})}=\frac{b^4+c^4}{b^2c^2(b^2+c^2)},$$

$$\left.\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right|_{(\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}},0,\pm\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}})}=\frac{a^4+c^4}{a^2c^2(a^2+c^2)},$$

五、条件极值

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\Big|_{\left(0,\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}},\pm\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}\right)}=\frac{b^4+c^4}{b^2c^2(b^2+c^2)},\quad \frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\Big|_{\left(\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}},0,\pm\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)}=\frac{a^4+c^4}{a^2c^2(a^2+c^2)},$$

为比较以上两值的大小，设$f(x)=\dfrac{x^4+c^4}{x^2c^2(x^2+c^2)}(0<b<a)$,则

$$f'(x)=\frac{2x(x^4-2c^2x^2-c^4)}{x^4(x^2+c^2)^2}=\frac{2x[(x^2-c^2)^2-2c^4]}{x^4(x^2+c^2)^2}=\frac{2x(x^2-c^2+\sqrt{2}c^2)(x^2-c^2-\sqrt{2}c^2)}{x^4(x^2+c^2)^2}.$$

如果要$f'(x)>0$,须将原条件$a>b>c>0$加强$a>b>\sqrt{1+\sqrt{2}}c$.从而得到$f(x)$在$[b,a]$单调增，从而$f(a)>f(b)$.

故原问题的最大值为$bc\sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{b^4+c^4}}$，最小值为$ac\sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{a^4+c^4}}$.



END

01 多元函数的无条件极值

02 条件极值

中国大学MOOC