全国大学生
数学竞赛
提高课程

01

第七章 向量代数与空间解析几何

中国大学MOOC



内容

01 向量代数

02 空间平面与直线

03 空间曲面与曲线

中国大学MOOC

一、向量代数

1.数量积

定义 设 $\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为θ，定义 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$.

性质 (1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$；

(2) $\vec{a}$，$\vec{b}$为非零向量，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$.

运算规律 (1) 交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$；

(2) 结合律 $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$；

(3) 分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

一、向量代数

坐标表示式 设 $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$，$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$

则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

两向量夹角 设 a，b 为非零向量

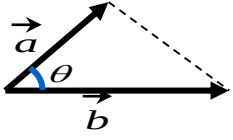
则 $$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

2.向量积

定义　设 a，b 的夹角为 θ，

定义　$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ 方向：$\vec{c}\perp\vec{a}$，$\vec{c}\perp\vec{b}$，符合右手法则；模：$|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\theta$

三角形面积　$S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$



一、向量代数

性质　(1) $\vec{a} \times \vec{a} = 0$;

(2) $\vec{a}, \vec{b}$ 为非零向量，则 $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$.

运算规律　(1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

(2) 结合律　$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$;

(3) 分配律　$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

一、向量代数

坐标表示式　设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$

则
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$$=\left\{\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right\}$$

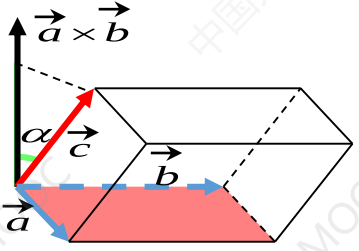
3.混合积

定义 已知三向量 a，b，c，称数量 $(a \times b) \cdot c$ 为 a，b，c 的混合积.记为 $\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]$.

几何意义 以 a，b，c 为棱作平行六面体，则其底面积 $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$，

高 $h = |\vec{c}| \cdot |\cos\alpha|$，

平行六面体体积为 $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$.



一、向量代数

性质 (1) 三个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面 $\Leftrightarrow \left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = 0$;

(2) 轮换对称性 $\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = \left[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}\right] = \left[\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}\right]$

坐标表示式 设 $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$,

$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$

则 $$\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right\}$$

中国大学MOOC

一、向量代数

例　设$\boldsymbol{l}_j(j=1,2,\cdots,n)$是平面上点$P_0$处的$n\geq 2$个方向向量，相邻两个向量之间的夹角为$\frac{2\pi}{n}$，若函数$f(x,y)$在点$P_0$有连续偏导数，证明：$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(P_0)}{\partial \boldsymbol{l}_j}=0$.

解　不妨设$\vec{\boldsymbol{l}}_j(\boldsymbol{j=1,2,\cdots,n})$都为单位向量，且设$\vec{\boldsymbol{l}}_j=\{\cos(\theta+\frac{2\pi j}{n}),\sin(\theta+\frac{2\pi j}{n})\}$,

$$\nabla f(P_0)=\{\frac{\partial f(P_0)}{\partial x},\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\},$$

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$$

则有$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \boldsymbol{l}_j}=\nabla f(P_0)\cdot\vec{\boldsymbol{l}}_j$.

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\cdots+\boldsymbol{b}_n)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}_2+\cdots+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}_n$$

因此$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(P_0)}{\partial \boldsymbol{l}_j}=\sum_{j=1}^{n}\nabla f(P_0)\cdot\vec{\boldsymbol{l}}_j=\nabla f(P_0)\cdot\sum_{j=1}^{n}\vec{\boldsymbol{l}}_j=\nabla f(P_0)\cdot\boldsymbol{0}=0$

二、空间平面与直线

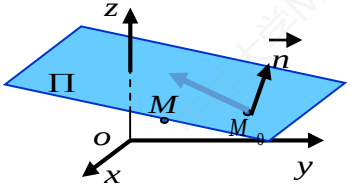
1.空间平面

平面的点法式方程 设一平面过已知点(x_0, y_0, z_0)，且垂直于非零向量$\vec{n} = \{A, B, C\}$，

则平面的点法式方程为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

法向量



平面的三点式方程

设平面过三点$M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，$M_3(x_3, y_3, z_3)$，

则
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

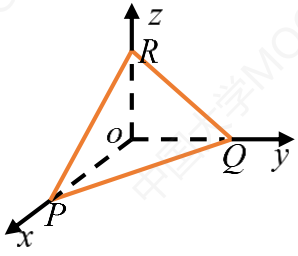
二、空间平面与直线

平面的截距式方程

设平面与三个坐标轴的交点为

$P(a,0,0)$，$Q(0,b,0)$，$R(0,0,c)$

则 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 \quad (a,\ b,\ c\neq 0)$



平面的一般式方程

三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$

称为平面的一般式方程.

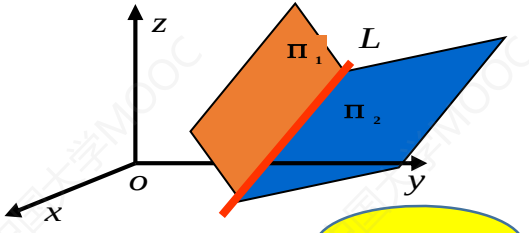
点到平面距离公式 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

2.空间直线

直线的一般式方程

直线可以看作两个平面的交线

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

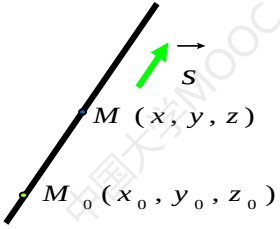


直线的对称式方程

设直线过已知点(x_0, y_0, z_0)，平行于向量为$\vec{s} = \{m, n, p\}$，

则平面的对称式方程为 $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$

也称为点向式方程.



二、空间平面与直线

直线的参数式方程

令 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$，得

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt, \quad t\text{为参数} \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

中国大学MOOC

二、空间平面与直线

例1　求通过直线 $L:\begin{cases}2x+y-3z+2=0\\5x+5y-4z+3=0\end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1 和 π_2，使其中一个平面过点 $(4,-3,1)$.

解　过直线 L 的平面束为 $\lambda(2x+y-3z+2)+\mu(5x+5y-4z+3)=0$，

即　$(2\lambda+5\mu)x+(\lambda+5\mu)y-(3\lambda+4\mu)z+(2\lambda+3\mu)=0$，

若平面 π_1 过点 $(4,-3,1)$，代入得 $\lambda+\mu=0$，即 $\mu=-\lambda$，

从而 π_1 的方程为　$3x+4y-z+1=0$

由平面束中的平面 π_2 与 π_1 垂直，则　$3(2\lambda+5\mu)+4(\lambda+5\mu)+(3\lambda+4\mu)=0$，

解得 $\lambda=-3\mu$，从而平面 π_2 的方程为 $x-2y-5z+3=0$.

二、空间平面与直线

例2　过单叶双曲面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-2z^2=1$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的交线且与直线 $L:\begin{cases}x=0\\3y+z=0\end{cases}$ 垂直的平面方程为 _____.

解　直线 L 的方向向量 $\vec{s}=\{1,0,0\}\times\{0,3,1\}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&0\\0&3&1\end{vmatrix}=-\vec{j}+3\vec{k}.$

所求平面的法向向量为 $\{0,1,-3\}$.

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-2z^2=1,\\x^2+y^2+z^2=4,\end{cases}$ 消去 x^2 可得 $y^2=9z^2$,

两曲面交线上的点满足 $y-3z=0$ 或 $y+3z=0$,

二、空间平面与直线

过单叶双曲面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}-2z^2=1$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的交线且与直线 $\begin{cases}x=0\\3y+z=0\end{cases}$ 垂直的平面方程为 _____.

两曲面交线上的点满足 $y-3z=0$ 或 $y+3z=0$,

也即过两曲面交线上的点的平面应该满足：$y-3z=0$ 或 $y+3z=0$,

由所求平面的法向向量为 $(0,1,-3)$ 得所求平面方程为 $y-3z=0$.

二、空间平面与直线

例3　求直线 $l_1:\begin{cases} x-y=0, \\ z=0 \end{cases}$ 与直线 $l_2:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$ 的距离．

解　直线 l_1 的对称式方程为 $l_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{0}$．　$\vec{l}_1=\{1,1,0\}$，$\vec{l}_2=\{4,-2,-1\}$，

$$\vec{l}_1\times\vec{l}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix}=\{-1,1,-6\}.$$

$P_1=(0,0,0)$、$P_2=(2,1,3)$，

$\vec{a}=\overrightarrow{P_1P_2}=\{2,1,3\}$．

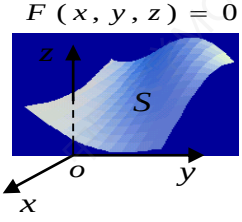
两直线的距离

$$d=\left|\frac{\vec{a}\cdot(\vec{l}_1\times\vec{l}_2)}{\left|\vec{l}_1\times\vec{l}_2\right|}\right|=\frac{|-2+1-18|}{\sqrt{1+1+36}}=\frac{19}{\sqrt{38}}=\sqrt{\frac{19}{2}}.$$

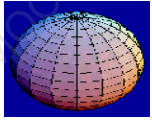
三、空间曲面与曲线

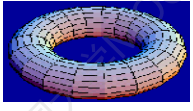
1.空间曲面

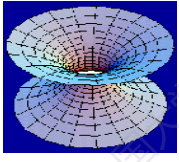
空间曲面的一般式方程　$F(x, y, z) = 0$

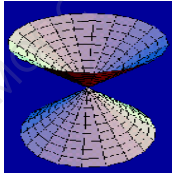


旋转曲面　一条平面曲线，绕其平面上的一条定直线旋转一周所形成的曲面称为旋转曲面.该定直线称为旋转轴.









三、空间曲面与曲线

旋转曲面方程

yOz面上曲线：$f(y,z)=0$绕z轴旋转所成曲面的方程：

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0;$$

xOy面上曲线：$f(x,y)=0$绕y轴旋转所成曲面的方程：

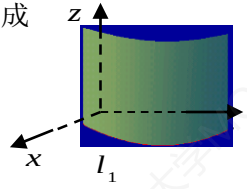
$$f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0;$$

xOz面上曲线：$f(x,z)=0$绕z轴旋转所成曲面的方程：

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

三、空间曲面与曲线

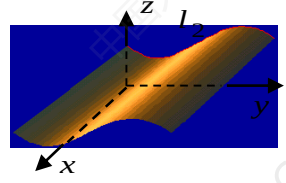
柱面 平行定直线并沿定曲线 C 移动的直线 l 形成的轨迹称为柱面. C 称为准线， l 称为母线.



在三维空间中

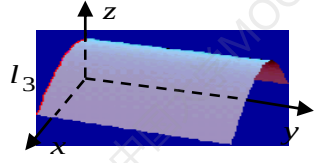
方程 $F(x,y)=0$ 表示柱面，

其母线平行于 z 轴， 准线为 xOy 面上的曲线 l_1;



方程 $G(y,z)=0$ 表示柱面，

其母线平行于 x 轴， 准线为 yOz 面上的曲线 l_2;



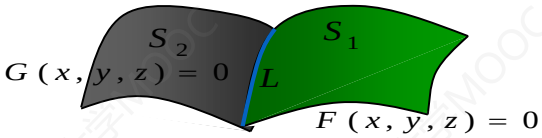
方程 $H(z,x)=0$ 表示柱面，

其母线平行于 y 轴， 准线为 xOz 面上的曲线 l_3.

三、空间曲面与曲线

2.空间曲线

空间曲线的一般式方程

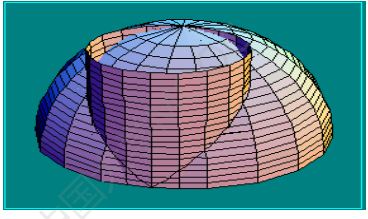


空间曲线可看着两曲面的交线

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

例如　维维安尼曲线

$$\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ \left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \end{cases}$$



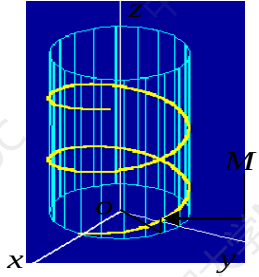
三、空间曲面与曲线

空间曲线的参数式方程

将曲线C的动点坐标x，y，z表示为参数t的函数

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t\text{为参数} \\ z = z(t) \end{cases}$$

例如　圆柱螺旋线：$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases}$



三、空间曲面与曲线

例　设M是以三个正半轴为母线的半圆锥面，求其方程.

解　显然$O(0,0,0)$为M的顶点，$A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$在M上，

A、B、C三点决定平面$x+y+z=1$与球面$x^2+y^2+z^2=1$的交线L是M的准线.

设$P(x,\ y,\ z)$是M上的点，$Q(u,\ v,\ w)$是母线OP与L的交点，

则 $\begin{cases} u+v+w=1 \\ u^2+v^2+w^2=1 \end{cases}$ ①　直线OP的方程为 $\dfrac{x}{u}=\dfrac{y}{v}=\dfrac{z}{w}=\dfrac{1}{t}$,

即$u=xt,\ v=yt,\ w=zt$　代入①得 $\begin{cases} (x+y+z)t=1, \\ (x^2+y^2+z^2)t^2=1. \end{cases}$

消去t，有$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2$,

整理得圆锥面M的方程为$xy+yz+zx=0$.



END

01 向量代数

02 空间平面与直线

03 空间曲面与曲线

中国大学MOOC