全国大学生
数学竞赛
提高课程

03

第六章 无穷级数

中国大学MOOC



内容

傅里叶级数

中国大学MOOC

四、傅里叶级数

1. 以2π为周期的周期函数展为傅里叶级数

设$f(x)$是以2π为周期的周期函数，展开成傅里叶级数：$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$

其中
$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

四、傅里叶级数

狄利克雷收敛定理 设$f(x)$是以2π为周期的周期函数，若它满足条件 (1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点；(2) 在一个周期内至多有有限个极值点

则$f(x)$的傅里叶级数收敛，且 (1) 当x是$f(x)$的连续点时，级数收敛于$f(x)$；

(2) 当x是$f(x)$的间断点时，级数收敛于$\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

注 (1) 函数展开成傅里叶级数的条件比展开成幂级数的条件低得多.

(2)定义在$(-\pi,\ \pi)$的函数可以展为傅里叶级数，

延拓为周期函数

当x为端点$x=\pm\pi$时，傅里叶级数收敛于$\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

四、傅里叶级数

奇函数和偶函数的傅里叶级数

设$f(x)$是以2π为周期的周期函数，在一个周期上可积，则

(1) 当$f(x)$是奇函数时，展开成傅里叶级数为：$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$，

正弦级数

它的傅里叶系数为
$$\begin{cases} a_n = 0, (n = 0,1,2,3,\cdots) \\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, (n = 1,2,3,\cdots) \end{cases};$$

(2) 当$f(x)$是偶函数时，展开成傅里叶级数为：$\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$，

余弦级数

它的傅里叶系数为
$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, (n = 0,1,2,3,\cdots) \\ b_n = 0, (n = 1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

四、傅里叶级数

注 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\pi,\ \pi)$ 的可积函数，则

延拓为周期函数

(1) 当 $f(x)$ 是奇函数时，展开成傅里叶级数为：$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$，

它的傅里叶系数为 $\begin{cases} a_n = 0, (n = 0,1,2,3,\cdots) \\ b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, (n = 1,2,3,\cdots) \end{cases}$

(2) 当 $f(x)$ 是偶函数时，展开成傅里叶级数为：$\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$，

它的傅里叶系数为 $\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, (n = 0,1,2,3,\cdots) \\ b_n = 0, (n = 1,2,3,\cdots) \end{cases}$

四、傅里叶级数

2.一般区间上的傅里叶级数

设$f(x)$是以$2l$为周期的周期函数，且满足收敛定理的条件

则其傅里叶展开式为：$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$

其中
$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

四、傅里叶级数

任意区间奇函数和偶函数的傅里叶级数

设$f(x)$是以$2l$为周期的周期函数，在一个周期上可积，则

(1) 当$f(x)$是奇函数时，展开成傅里叶级数为：$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$

其中$\begin{cases} a_n = 0, (n = 0,1,2,3,\cdots) \\ b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,\cdots) \end{cases}$；

(2) 当$f(x)$是偶函数时，展开成傅里叶级数为：$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$

其中$\begin{cases} a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \ (n = 0,1,2,\cdots) \\ b_n = 0 \ (n = 1,2,3,\cdots) \end{cases}$.

四、傅里叶级数

注 设 $f(x)$ 是定义在 $(-l,\ l)$ 上的可积函数，则

延拓为周期函数

(1) 当 $f(x)$ 是奇函数时，展开成傅里叶级数为：$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$

其中 $\begin{cases} a_n = 0, (n = 0,1,2,3,\cdots) \\ b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \quad (n = 1,2,\cdots) \end{cases}$；

(2) 当 $f(x)$ 是偶函数时，展开成傅里叶级数为：$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$

其中 $\begin{cases} a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x \ (n = 0,1,2,\cdots) \\ b_n = 0 \ (n = 1,2,3,\cdots) \end{cases}$.

四、傅里叶级数

例1　函数 $f(x)=\begin{cases}3, & x\in[-5,0)\\ 0, & x\in[0,5)\end{cases}$，定义在 $(-5,5]$ 内的傅立叶级数 $x=0$ 处的收敛值为 _____.

解　由狄利克雷收敛定理，得 $S(0)=\dfrac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\dfrac{3}{2}$.

四、傅里叶级数

例2　设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导，且 $f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$.

用傅里叶级数理论证明$f(x)$为常数.

证　由 $f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$可知$f$是以 $2,\sqrt{3}$为周期的周期函数，

傅里叶系数为 $a_n=\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x$，$b_n=\int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x$.

$$a_n=\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} f(x+\sqrt{3})\cos n\pi x\,\mathrm{d}x$$

由于 $f(x)=f(x+\sqrt{3})$,

$$=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)\cos n\pi(t-\sqrt{3})\,\mathrm{d}t=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)(\cos n\pi t\cos\sqrt{3}n\pi+\sin n\pi t\sin\sqrt{3}n\pi)\,\mathrm{d}t$$

$$=\cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)\cos n\pi t\,\mathrm{d}t+\sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)\sin n\pi t\,\mathrm{d}t$$

$$=a_n\cos\sqrt{3}n\pi+b_n\sin\sqrt{3}n\pi;$$

四、傅里叶级数

设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导，且 $f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$.
用傅里叶级数理论证明$f(x)$为常数.

$a_n = a_n\cos\sqrt{3}n\pi + b_n\sin\sqrt{3}n\pi$　　同理可得 $b_n = b_n\cos\sqrt{3}n\pi - a_n\sin\sqrt{3}n\pi$

联立有 $\begin{cases} a_n = a_n\cos\sqrt{3}n\pi + b_n\sin\sqrt{3}n\pi, \\ b_n = b_n\cos\sqrt{3}n\pi - a_n\sin\sqrt{3}n\pi, \end{cases}$

解得 $a_n = b_n = 0$ ($n=1,2,\cdots$).

而$f(x)$可导，其傅里叶级数处处收敛于$f(x)$,

所以有 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\dfrac{a_0}{2}$，其中 $a_0=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$为常数.

四、傅里叶级数

例3 （1）将$[-\pi, \pi)$上的函数$f(x)=|x|$展开成傅里叶级数，并证明$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$；

（2）求积分$I=\int_0^{+\infty}\frac{u}{1+e^u}du$的值.

解 （1）$f(x)=|x|$为偶函数，其傅里叶级数是余弦级数.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\pi$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}-\frac{4}{n^2\pi}, & n=1,3,\cdots,\\ 0, & n=2,4,\cdots.\end{cases}$$

由于$f(x)$连续，所以当$x\in[-\pi, \pi)$时，有

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots).$$

(1) 将 $[-\pi,\ \pi)$ 上的函数 $f(x)=|x|$ 展开成傅里叶级数，并证明 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

(2) 求积分 $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{u}{1+\mathrm{e}^u}\mathrm{d}u$ 的值.

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right),\quad x\in[-\pi,\ \pi)$$

令 $x=0$，得 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$.

记 $S_1=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$，$S_2=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}$，

则 $S_1-S_2=\dfrac{1}{4}S_1$，故 $S_1=\dfrac{4}{3}S_2=\dfrac{\pi^2}{6}$.

(2) 令 $g(u)=\dfrac{u}{1+\mathrm{e}^u}$，则 $g(u)=\dfrac{u\mathrm{e}^{-u}}{1+\mathrm{e}^{-u}}=u\mathrm{e}^{-u}(1-\mathrm{e}^{-u}+\mathrm{e}^{-2u}-\cdots)$

$$=u\mathrm{e}^{-u}-u\mathrm{e}^{-2u}+u\mathrm{e}^{-3u}-\cdots,\quad u\in[0,+\infty)$$

记该级数的前 n 项和为 $S_n(u)$，余项为 $r_n(u)=g(u)-S_n(u)$，

四、傅里叶级数

(2) 求积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{u}{1+\mathrm{e}^u}\mathrm{d}u$ 的值.

$$S_1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$g(u)=\frac{u\mathrm{e}^{-u}}{1+\mathrm{e}^{-u}}=u\mathrm{e}^{-u}-u\mathrm{e}^{-2u}+u\mathrm{e}^{-3u}-\cdots,\quad u\in[0,+\infty)$$

$$g(u)=S_n(u)+r_n(u)$$

则由交错级数的性质知 $\left|r_n(u)\right|\le u\mathrm{e}^{-(n+1)u}$.

$$\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-nu}\mathrm{d}u=-\frac{1}{n}\int_0^{+\infty}u\mathrm{d}\mathrm{e}^{-nu}=-\frac{1}{n}\left[(u+\frac{1}{n})\mathrm{e}^{-nu}\Big|_0^{+\infty}\right]=\frac{1}{n^2},\quad \text{有}\int_0^{+\infty}\left|r_n(u)\right|\mathrm{d}u\le\frac{1}{(n+1)^2},$$

于是有 $\int_0^{+\infty}g(u)\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}S_n(u)\mathrm{d}u+\int_0^{+\infty}r_n(u)\mathrm{d}u=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}+\int_0^{+\infty}r_n(u)\mathrm{d}u$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}r_n(u)\mathrm{d}u=0$, 故 $I=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$,

所以 $I+\frac{1}{2}S_1=S_1$, 由(1)得 $I=\frac{1}{2}S_1=\frac{\pi^2}{12}$.



END

傅里叶级数

中国大学MOOC