全国大学生
数学竞赛
提高课程

02

第六章 无穷级数

中国大学MOOC



幂级数

收敛域及和函数

中国大学MOOC

三、幂级数

1.幂级数的收敛域与收敛区间

定理1（阿贝尔定理）

(1) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 x_0 处收敛，则在满足 $|x| < |x_0|$ 的 x 点处绝对收敛；

(2) 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 x_0 处发散，则在满足 $|x| > |x_0|$ 的 x 点处发散.

三、幂级数

1.幂级数的收敛域与收敛区间

定理2（幂级数收敛半径的求法） 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l$，则其收敛半径为 $R = \begin{cases} \dfrac{1}{l}, & l \neq 0 \\ +\infty, & l = 0 \\ 0, & l = +\infty \end{cases}$.

三、幂级数

定义

正数 R 称为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径.

开区间 $(-R, R)$ 叫做幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间.

收敛区间加上收敛的端点构成幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域.

即收敛域是 $(-R, R)$ 、$[-R, R)$ 、 $(-R, R]$ 或 $[-R, R]$ 这四个区间之一.

规定

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 只在 $x = 0$ 收敛, 则规定收敛半径 $R = 0$;

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 对一切 x 都收敛, 则规定收敛半径 $R = +\infty$,

这时收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

三、幂级数

求幂级数收敛域的基本步骤

(1) 先观察$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$缺项与否；

(2) 若不缺项，求$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ (或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$)，

则
$$R = \begin{cases} 0, & \rho = +\infty, \\ \dfrac{1}{\rho}, & 0 < \rho < +\infty, \\ +\infty, & \rho = 0. \end{cases}$$

(2)′ 若缺项，应用比值判别法或根值判别法（即求$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}$）；

(3) 考察幂级数在两端点的收敛性，写出收敛域.

三、幂级数

2.幂级数的四则运算

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$和$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径分别为$R_1$，$R_2$.

(1)加减法 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$，$R = \min\{R_1, R_2\}$.

(2)乘法 $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$，$R = \min\{R_1, R_2\}$，

其中$c_n = a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \cdots + a_n \cdot b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ $(n = 0,1,2,\cdots)$.

三、幂级数

(3)除法

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (\text{收敛域内} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \neq 0),$$

$$a_0 = b_0 c_0, a_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1, \cdots, a_n = b_n c_0 + b_{n-1} c_1 + \cdots + b_0 c_n, \cdots$$

用这些方程顺序的求出系数$c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$.

相除后所得的幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$的收敛区间可能比原来级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

和$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛区间小得多.

3.幂级数和函数的性质

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间为 $(-R,\ R)$，和函数 $S(x)$ 满足

性质1 $S(x)$ 在 $(-R,\ R)$ 内连续；如果幂级数在 $x = R$ (或 $x = -R$) 收敛，则和函数 $S(x)$ 在 $(-R,\ R]$ (或 $[-R,\ R)$) 连续.

性质2 $S(x)$ 在 $(-R,\ R)$ 内可导，且可逐项求导，且收敛半径相同

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

2.幂级数和函数的性质

性质3　$S(x)$在$(-R,\ R)$内可积，且可逐项求积，且收敛半径相同

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x a_nx^n\mathrm{d}x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

注

(1) 逐项求导或逐项积分后得到的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径和收敛区间，但收敛域可能会改变.

(2) 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的和函数$S(x)$在其收敛区间$(-R,R)$内具有任意阶导数.

三、幂级数

求和函数的基本思想

求$S(x)$基本思想：利用幂级数的和函数的性质将所给幂级数化为几何级数或其他可求和的级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \qquad (-1 < x < 1);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^n + \cdots = \frac{1}{1+x} \qquad (-1 < x < 1);$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = e^x \quad (-\infty < x < +\infty).$$

求和函数的基本步骤

(1) 先求幂级数的收敛半径R，确定收敛域；

(2) 在收敛区间$(-R,R)$内，用逐项求导或逐项积分的方法求幂级数的和函数；

(3) 利用和函数在收敛域上是连续的，和函数的定义域为幂级数的收敛域.

一般常用逐项求导法去掉系数中的“$\frac{1}{n}$”因子；

用逐项积分法去掉系数中的“n”因子；

中国大学MOOC

三、幂级数

例 1　已知 $u_n(x)$ 满足 $u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x$，$n=1,2,\cdots$，且 $u_n(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{n}$，

求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之和.

分析　先解一阶常系数微分方程，求出 $u_n(x)$ 的表达式，然后再求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和.

解　由已知条件可知 $u_n'(x)-u_n(x)=x^{n-1}\mathrm{e}^x$，

其通解为 $u_n(x)=\mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}\left(\int x^{n-1}\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^x\left(\dfrac{x^n}{n}+C\right)$.

由条件 $u_n(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{n}$，得 $C=0$，故 $u_n(x)=\dfrac{x^n\mathrm{e}^x}{n}$.

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x x^n}{n}=\mathrm{e}^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$.　记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$，其收敛域为 $[-1,1)$，

三、幂级数

已知 $u_n(x)$ 满足 $u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x$，$n=1,2,\cdots$，且 $u_n(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{n}$，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之和.

记 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$，其收敛域为 $[-1,1)$，

当 $x\in(-1,1)$ 时，有 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\dfrac{1}{1-x}$，

故 $S(x)=\int_0^x\dfrac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln(1-x)$.　　当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-\mathrm{e}^{-1}\ln 2$.

所以当 $-1\le x<1$ 时，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-\mathrm{e}^x\ln(1-x)$.

三、幂级数

例 2　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的和函数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{2n-1}\left|x^2\right|=\frac{1}{2}\left|x^2\right|<1,$

解得 $|x|<\sqrt{2},$　其收敛区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2},$　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2}=S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}t^{2n-2}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-1}=\frac{x}{2-x^2},$$

于是　$S(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{\left(2-x^2\right)^2},\quad x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right).$

三、幂级数

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的和函数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和.

$$S(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{\left(2-x^2\right)^2},\quad x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right).$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2}=S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{10}{9}.$

三、幂级数

例3　求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域与和函数.

解　因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+2}{(n+1)(n^3+2)}=0$,

所以收敛半径 $R=+\infty$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

$$\frac{n^3+2}{(n+1)!}=\frac{(n^3-n)+(n+1)+1}{(n+1)!}=\frac{(n+1)n(n-1)}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}$$

$$=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\quad(n\geq 2)$$

幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n-2)!},\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!},\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$ 的收敛域都为 $(-\infty,+\infty)$,

三、幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n-2)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)!}.$$

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域与和函数.

$$S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n-2)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+2}}{n!}=(x-1)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}=(x-1)^2e^{x-1},$$

$$S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}=e^{x-1},$$

$$e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$$

$$S_3(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)!}=\frac{1}{x-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{1}{x-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}=\frac{e^{x-1}-1}{x-1}\quad(x\neq 1).$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n=2+\frac{3}{2}(x-1)+\frac{10}{3!}(x-1)^2+\cdots+\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n+\cdots\Rightarrow S(1)=2$$

综上可得幂函数的和函数为 $S(x)=\begin{cases}(x-2x+2)e^{x-1}+\dfrac{1}{x-1}(e^{x-1}-1), & x\neq 1,\\ 2, & x=1.\end{cases}$



END

收敛域及和函数

中国大学MOOC