全国大学生
数学竞赛
提高课程

01

第六章 无穷级数

中国大学MOOC



常数项级数

01 正项级数

02 任意项级数

中国大学MOOC

一、正项级数

1.正项级数收敛的充要条件

若$u_n \geq 0\ (n = 1,2,\cdots)$，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数．

定理1

正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的充分必要条件是其部分和数列$\{s_n\}$有界．

2.正项级数比较审敛法

定理2 （比较审敛法）设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$是两个正项级数，且$u_n \le v_n \ (n = 1,2,\cdots)$.

(1) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛；

(2) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$也发散.

中国大学MOOC

推论 (比较审敛法的极限形式) 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数, 且$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$.

(1)如果$0 < l < +\infty$, 则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$同时收敛或同时发散;

(2)如果$l = 0$, 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛, 则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛;

(3)如果$l = +\infty$, 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散, 则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散 .

注 用比较审敛法或其极限形式, 都需要找到一个已知敛散性的参考级数做比较. 常用的参考级数有等比级数、调和级数和$p-$级数.

3.正项级数比值审敛法

定理3 **(比值审敛法,达郎贝尔判别法)** 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$，

则 (1)当 $\rho < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2)当 $\rho > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；

(3)当 $\rho = 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛，也可能发散．

注

(1) 当 $\rho = 1$ 时比值审敛法失效；

(2) 条件是充分而非必要的．(逆命题不成立)

一、正项级数

4.正项级数根值审敛法

定理4 **(根值审敛法，柯西判别法)**设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$ ，

则 (1) 当 $\rho < 1$ 时，级数收敛；

(2) 当 $\rho > 1$ 时，级数发散；

(3)当 $\rho = 1$ 时，级数可能收敛，也可能发散 .

注

(1) 当 $\rho = 1$ 时根值审敛法失效；

(2) 条件是充分而非必要的 . (逆命题不成立)

中国大学MOOC

一、正项级数

例 1　设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|$ 收敛.

证　由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，则

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0,\qquad f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{1}{2}f''(0)$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|}{\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{1}{2}\left|f''(0)\right|$.　由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|$ 收敛.

2013预赛，14分

例2　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性.

解　记 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，$u_n=\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$，$n=1,2,3\cdots$.

因为 n 充分大时，$0<a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=1+\ln n<\sqrt{n}$

$$\int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$>\int_1^2\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{3}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^n\frac{1}{n}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$\int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x>\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\ln n}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{2}=+\infty$$

一、正项级数

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性.

$$a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},\quad u_n = \frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$$

因为 n 充分大时，

$$0 < a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} < 1+\int_1^n \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 1+\ln n < \sqrt{n},$$

所以 $u_n \le \frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛

根据正项级数比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

二、任意项级数

1.交错级数审敛法

定理5 （莱布尼兹定理）如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足条件：

(1) $u_n \geq u_{n+1} > 0 (n = 1,2,\cdots)$ ；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ ，

则交错级数收敛，且其和 $s \leq u_1$ ，余项的绝对值 $|r_n| \leq u_{n+1}$ ．

二、任意项级数

注 (1) 定理中要求$\{u_n\}$单调递减的条件不是多余的．

例如，级数$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{5^n}+\cdots$是发散的.

当$n\to\infty$时，$u_n\to 0$，但$\{u_n\}$不具有单调性．

(2) $\{u_n\}$单调递减的条件不是必要的．

例如，级数$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^3}-\frac{1}{(2n)^2}+\cdots$是收敛的，

但其$\{u_n\}$并不具有单调递减性．

二、任意项级数

2.任意项级数审敛法

定义 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$各项的绝对值所构成的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛；

如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，而级数$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$发散，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$条件收敛．

定理6 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$一定收敛．

二、任意项级数

注 (1)对于任意项级数$\sum^{\infty} u_n$，如果级数$\sum^{\infty} |u_n|$收敛，那么级数$\sum^{\infty} u_n$一定收敛，这样可以把一大类级数的敛散性判定问题，转化成正项级数的敛散性判定问题．

(2)如果级数$\sum^{\infty} |u_n|$发散，不能判定级数$\sum^{\infty} u_n$发散．

例 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散，但交错级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$收敛．

二、任意项级数

推论 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是任意项级数，如果$\lim_{n\to\infty} |\frac{u_{n+1}}{u_n}| = \rho$（或$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho$），

则(1)当$\rho < 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛；

(2)当$\rho > 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散；

(3)当$\rho = 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$可能收敛，也可能发散．

例 级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}$绝对收敛，级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$条件收敛，

级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$发散．

二、任意项级数

例1　设$f(x)$是在$(-\infty,+\infty)$内的可微函数，且$|f'(x)|<mf(x)$，其中$0<m<1$.

任取实数a_0，定义$a_n=\ln f(a_{n-1})$，$n=1,2,\cdots$.证明：$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n-a_{n-1})$绝对收敛.

证　$|a_n-a_{n-1}|=|\ln f(a_{n-1})-\ln f(a_{n-2})|$

$=\left|\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(a_{n-1}-a_{n-2})\right|$　（ξ介于a_n，a_{n-1}之间）　$|a_n-a_{n-1}|<m|a_{n-1}-a_{n-2}|$

$<m|a_{n-1}-a_{n-2}|<m^2|a_{n-2}-a_{n-3}|<\cdots<m^{n-1}|a_1-a_0|$.

而$0<m<1$，级数$\sum_{n=1}^{+\infty}m^{n-1}$收敛.

根据正项级数比较审敛法知$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n-a_{n-1})$绝对收敛.

二、任意项级数

例 2　设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \mathrm{d}x$，其中 n 为正整数.

(1) 若 $n \geq 2$，计算 $I_n + I_{n-2}$;

(2) 设 p 为实数，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n^p$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

解　(1) $I_n + I_{n-2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x (1 + \tan^2 x) \mathrm{d}x$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x \cdot \sec^2 x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x \mathrm{d}(\tan x) = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n-1}.$$

(2) 由于 $0 < x < \frac{\pi}{4}$，所以 $0 < \tan x < 1$，$\tan^{n+2} x < \tan^n x < \tan^{n-2} x$，

从而 $I_{n+2} < I_n < I_{n-2}$，于是 $I_{n+2} + I_n < 2I_n < I_{n-2} + I_n$.

二、任意项级数

设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \mathrm{d}x$，其中 n 为正整数. (1) 若 $n \geq 2$，计算 $I_n + I_{n-2}$；

(2) 设 p 为实数，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n^p$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

$$I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$$

$$I_{n+2} + I_n < 2I_n < I_{n-2} + I_n$$

故 $\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}$，$\frac{1}{2^p(n+1)^p} < I_n^p < \frac{1}{2^p(n-1)^p}$.

当 $p > 1$ 时，$\left|(-1)^p I_n^p\right| = I_n^p < \frac{1}{2^p(n-1)^p} \quad (n \geq 2)$，

由于 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^p}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n^p$ 绝对收敛.

二、任意项级数

设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \mathrm{d}x$，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n^p$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

$$I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$$

$$\frac{1}{2^p (n+1)^p} < I_n^p < \frac{1}{2^p (n-1)^p}$$

当 $0 < p \le 1$ 时，由于 $\{I_n^p\}$ 单调减少并趋于 0，由莱布尼兹判别法得 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n^p$ 收敛.

而 $I_n^p > \frac{1}{2^p (n+1)^p} \ge \frac{1}{2^p} \cdot \frac{1}{n+1}$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^p I_n^p \right|$ 发散.

因此 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n^p$ 条件收敛.

当 $p \le 0$ 时，$\left| I_n^p \right| \ge 1$，由级数收敛的必要条件知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n^p$ 发散.

二、任意项级数

设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \mathrm{d}x$，其中 n 为正整数. (1) 若 $n \geq 2$，计算 $I_n + I_{n-2}$；

(2) 设 p 为实数，讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n^p$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

综上，

当 $p > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n^p$ 绝对收敛；

当 $0 < p \leq 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n^p$ 条件收敛；

当 $p \leq 0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n^p$ 发散.



END

01 正项级数

02 任意项级数

中国大学MOOC