全国大学生
数学竞赛
提高课程

01

第五章 常微分方程

中国大学MOOC

内容



01 一阶微分方程

02 可降阶的高阶微分方程

03 二阶线性微分方程

中国大学MOOC

一、一阶微分方程

1.可分离变量微分方程

可分离变量的微分方程就是可以将变量x和变量y分别分离到等号两边的微分方程.

这种方程一般具有如下形式： $y' = f(x)\cdot g(y)$, 其中$f(x)$和$g(y)$是连续函数.

对上述可分离变量的微分方程通常采用如下步骤求其通解：

(1) 用$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$替换方程中的$y'$；

(2) 分离变量 $\dfrac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x \quad (g(y)\neq 0)$;

(3) 两边积分 $\displaystyle\int \frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x$;

(4) 设$G(y), F(x)$分别是$\dfrac{1}{g(y)}$，$f(x)$的一个原函数，于是可得原方程的通解为

$G(y) = F(x) + C$(C为任意常数).

2018决赛，6分

例 1　满足 $\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=u(t)+\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t$ 及 $u(0)=1$ 的可微函数 $u(t)=$ _____.

解　记 $A=\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t$，则 $\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=u(t)+A$,

分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u+A}=\mathrm{d}t$,　积分得 $\ln(u+A)=t+\ln C$

整理得 $u=C\mathrm{e}^t-A$，把 $u(0)=1$ 代入得 $C=A+1$.　$\therefore\ u(t)=(A+1)\mathrm{e}^t-A$

上式两端积分 $\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t=(A+1)\int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t-A \quad\Rightarrow\quad A=(A+1)(\mathrm{e}-1)-A$

解得 $A=\dfrac{\mathrm{e}-1}{3-\mathrm{e}}$　故 $u(t)=(\dfrac{\mathrm{e}-1}{3-\mathrm{e}}+1)\mathrm{e}^t-\dfrac{\mathrm{e}-1}{3-\mathrm{e}}=\dfrac{2\mathrm{e}^t-\mathrm{e}+1}{3-\mathrm{e}}$.

一、一阶微分方程

2.一阶线性微分方程

一阶线性微分方程的标准形式为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ ①

其中$P(x)$，$Q(x)$为已知的连续函数，$Q(x)$称为方程的自由项.

当$Q(x)\neq 0$时，称$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$为一阶非齐次线性微分方程.

当$Q(x)=0$时，①式变为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$ ②

称②为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$所对应的一阶齐次线性微分方程.

方程$y'+P(x)y=Q(x)$的通解为 $y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$.

例 2　已知可导函数 $f(x)$ 满足 $\cos x f(x)+2\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t=x+1$，则 $f(x)=$ _____.

解　在方程两边求导得　$f'(x)\cos x+f(x)\sin x=1$，　　$f(0)=1$

即　$f'(x)+f(x)\tan x=\sec x$，

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int\tan x\mathrm{d}x}\left(\int\sec x\mathrm{e}^{\int\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{\ln\cos x}\left(\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{e}^{-\ln\cos x}\mathrm{d}x+C\right)=\cos x\left(\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\cos x(\tan x+C)=\sin x+C\cos x$$

由于 $f(0)=1$，故 $f(x)=\sin x+\cos x$.

3.全微分方程

定义 设$P(x,y)$、$Q(x,y)$在区域G上有连续的一阶偏导数，若$\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$，则称$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$为全微分方程.

结论 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$为全微分方程 $\Leftrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

通解 $\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y=C$，

其中(x_0,y_0)是G内一适当选定的点.



例 3　求方程 $(2x+y-4)\mathrm{d}x+(x+y-1)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解　所给方程改写为 $(2x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)+(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)-(4\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)=0$,

即　$\mathrm{d}\left(x^2+\frac{1}{2}y^2\right)+\mathrm{d}(xy)-\mathrm{d}(4x+y)=0.$

即　$\mathrm{d}\left[x^2+\frac{1}{2}y^2+xy-(4x+y)\right]=0$

故所求通解为　$x^2+\frac{1}{2}y^2+xy-(4x+y)=C.$

二、可降阶的高阶微分方程

不显含y

方程$y''=f(x,y')$的特点是其方程右端不显含未知函数y.

令$y'=p(x)$，则$y''=p'(x)$，代入方程得$p(x)$的一阶微分方程

$$p'(x)=f[x,p(x)],$$

设其通解为 $$p(x)=\varphi(x,C_1),$$

即得一阶微分方程 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(x,C_1),$$

求解该一阶微分方程就能得到原方程的通解为

$$y=\int\varphi(x,C_1)\mathrm{d}x+C_2.$$

二、可降阶的高阶微分方程 2010预赛，15分

例　设函数$y=f(x)$由参数方程$\begin{cases}x=2t+t^2\\ y=\psi(t)\end{cases}$，$t>-1$所确定，且$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，其中$\psi(t)$具有二阶导数，曲线$y=\psi(t)$与$y=\int_1^{t^2}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u+\dfrac{3}{2\mathrm{e}}$在$t=1$处相切，求函数$\psi(t)$.

解　$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{2+2t},\qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\psi'(t)}{2+2t}\right)}{\mathrm{d}t}\Bigg/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{(2+2t)\psi''(t)-2\psi'(t)}{(2+2t)^2}\cdot\frac{1}{2+2t}$$

$$=\frac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3},$$

由题设$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，得$\dfrac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，

二、可降阶的高阶微分方程

设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2t+t^2, \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $t>-1$ 所确定，且 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数，曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\int_1^{t^2} e^{-u^2}du+\dfrac{3}{2e}$ 在 $t=1$ 处相切.求函数 $\psi(t)$

从而 $(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)=3(1+t)^2$，

$$\frac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3}=\frac{3}{4(1+t)},$$

即 $\psi''(t)-\dfrac{1}{1+t}\psi'(t)=3(1+t).$ 设 $u=\psi'(t)$，则有 $u'-\dfrac{1}{1+t}u=3(1+t),$

故 $u=e^{\int\frac{1}{1+t}dt}\left[\int 3(1+t)e^{-\int\frac{1}{1+t}dt}dt+C_1\right]$

$$=(1+t)\left[\int 3(1+t)(1+t)^{-1}dt+C_1\right]=(1+t)(3t+C_1),$$

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$$

$$\psi(t)=\int(1+t)(3t+C_1)dt=\int[3t^2+(3+C_1)t+C_1]dt=t^3+\frac{3+C_1}{2}t^2+C_1t+C_2.$$

二、可降阶的高阶微分方程

设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2t+t^2, \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $t>-1$ 所确定，且 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数，曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\int_1^{t^2} e^{-u^2}du+\dfrac{3}{2e}$ 在 $t=1$ 处相切.求函数 $\psi(t)$

$$\psi(t)=t^3+\frac{3+C_1}{2}t^2+C_1t+C_2.$$

$$\psi'(t)=3t^2+(3+C_1)t+C_1$$

由曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\int_1^{t^2} e^{-u^2}du+\dfrac{3}{2e}$ 在 $t=1$ 处相切知 $\psi(1)=\dfrac{3}{2e}$，

$\psi'(1)=\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}=\left.2te^{-t^4}\right|_{t=1}=\dfrac{2}{e}.$ 由此知 $C_1=\dfrac{1}{e}-3$

由 $\psi(1)=\dfrac{3}{2e}$，知 $C_2=2.$ 于是 $\psi(t)=t^3+\dfrac{1}{2e}t^2+(\dfrac{1}{e}-3)t+2,\ t>-1$

三、二阶线性微分方程

1.解的结构

定理1 （二阶线性齐次微分方程通解的结构）

若y_1，y_2是二阶线性齐次微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$的两个线性无关的解，则$y=C_1y_1+C_2y_2$是方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$的通解，其中C_1,C_2为任意常数.

定理2 若y_1，y_2是二阶线性非齐次微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的两个特解，则$y=y_1-y_2$是其对应的二阶线性齐次微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=0$的解.

三、二阶线性微分方程

定理3 （二阶线性非齐次微分方程通解的结构） 若y^*是$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的一个特解，Y是$y''+p(x)y'+q(x)y=0$的通解，则二阶线性非齐次微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的通解是$y=Y+y^*$.

定理4 （二阶线性非齐次微分方程解的叠加定理）

设二阶线性非齐次微分方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$的自由项可以写成两个函数之和$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，即 $y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)+f_2(x).$

若y_1^*与y_2^*分别是方程$y''+p(x)y'+q(x)y=f_1(x)$与$y''+p(x)y'+q(x)y=f_2(x)$的特解，那么$y=y_1^*+y_2^*$就是方程

$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的特解.

三、二阶线性微分方程　2009预赛，10分

例　已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$，$y_2 = xe^x + e^{-x}$，$y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程.

分析　根据二阶线性非齐次微分方程解的结构的有关知识，由题设可知$2y_1 - y_2 - y_3 = e^{2x}$与$y_1 - y_3 = e^{-x}$是相应齐次方程两个线性无关的解，且$xe^x$是非齐次方程的一个特解，因此可以用下述两种解法.

解法1 设此方程式为　$y'' - y' - 2y = f(x)$.　将$y = xe^x$代入上式，得

$$f(x) = (xe^x)'' - (xe^x)' - 2xe^x = 2e^x + xe^x - e^x - xe^x - 2xe^x = e^x - 2xe^x,$$

因此所求方程为$y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$.

三、二阶线性微分方程

已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$，$y_2 = xe^x + e^{-x}$，$y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程

分析　根据二阶线性非齐次微分方程解的结构的有关知识，

由题设可知$2y_1 - y_2 - y_3 = e^{2x}$与$y_1 - y_3 = e^{-x}$是相应齐次方程两个线性无关的解，且$xe^x$是非齐次方程的一个特解，因此可以用下述两种解法.

解法2　设 $y = xe^x + C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$是所求方程的通解，

$y' = e^x + xe^x + 2C_1e^{2x} - C_2e^{-x}$，　$y'' = 2e^x + xe^x + 4C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$，

消去C_1，C_2得所求方程为 $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$.

三、二阶线性微分方程

2.二阶常系数齐次线性微分方程

二阶常系数齐次线性微分方程$y''+py'+qy=0$通解的求解过程如下：

(1) 将原方程化为标准形式：$y''+py'+qy=0$.

(2) 写出$y''+py'+qy=0$的特征方程$r^2+pr+q=0$，求得特征根r_1，r_2.

(3) 按照下表得到$y''+py'+qy=0$的通解.

$y''+py'+qy=0$的特征根	$y''+py'+qy=0$的通解
两个不等的实根$r_1\neq r_2$	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
两个相等的实根$r_1=r_2=r$	$y=(C_1+C_2x)e^{rx}$
一对共轭复根$r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

三、二阶线性微分方程　2014预赛，6分

例　已知$y_1 = e^x$，$y_2 = xe^x$是二阶齐次常系数线性微分方程的解，则该方程是_____.

解　由解的表达式知微分方程的特征根有二重根$r_1 = r_2 = 1$,

对应特征方程为$r^2 - 2r + 1 = 0$,

故所求微分方程为$y'' - 2y' + y = 0$.

中国大学MOOC

三、二阶线性微分方程

3.二阶常系数非齐次线性微分方程

(1) 将原方程化为标准形式：$y''+py'+qy=f(x)$，求出对应齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解 Y.

(2) 确定 $y''+py'+qy=f(x)$ 的特解 y^* 的形式并代入原方程，最终求出特解 y^*.

$y''+py'+qy=P_m(x)e^{\lambda x}$ 的特解	$y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$
λ 不是特征根时	$y^*=Q_m(x)e^{\lambda x}$
λ 是特征单根时	$y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}$
λ 是特征二重根时	$y^*=x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$

三、二阶线性微分方程

自由项形式为$f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$，其中$P_l(x)$，$P_n(x)$分别是关于$x$的$l$次和$n$次多项式，$\lambda$，$\omega$为常数.

一般地，非齐次方程$y''+py'+qy=f(x)$的特解可设为

$$y^*=x^k\mathrm{e}^{\lambda x}[R_m^1(x)\cos\omega x+R_m^2(x)\sin\omega x],$$

其中$R_m^1(x)$，$R_m^2(x)$均为m次待定多项式，$m=\max\{l,\ n\}$，

当$\lambda\pm\omega\mathrm{i}$不是特征根时，$k=0$；当$\lambda\pm\omega\mathrm{i}$是特征根时，$k=1$.

END



01 一阶微分方程

02 可降阶的高阶微分方程

03 二阶线性微分方程

中国大学MOOC