全国大学生
数学竞赛
提高课程

04

第四章 一元函数积分学

中国大学MOOC



内容

05 积分上限函数的导数

06 定积分的应用

中国大学MOOC

五、积分上限函数的导数

1.积分上限函数的定义

设函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上连续，定积分$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$定义了一个在区间$[a,b]$上的函数，称为积分上限函数，记作

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b].$$

2.积分上限函数的导数

定理 设函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上连续，则积分上限函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在区间$[a,b]$上可导，且

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=f(x),\ x\in[a,b].$$

中国大学MOOC

五、积分上限函数的导数

例1　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{u^2}\,du\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2}\,du}=$ _____. $\dfrac{\infty}{\infty}$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\int_0^x e^{u^2}\,du\cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\int_0^x e^{u^2}\,du}{e^{x^2}}$

$\dfrac{\infty}{\infty}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

五、积分上限函数的导数

例 2　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0$，且当 $x\in(0,1)$ 时，$0<f'(x)<1$.

试证：当 $a\in(0,1)$ 时，有 $\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2>\int_0^a f^3(x)\mathrm{d}x$.

证　设 $F(x)=\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2-\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t$，则 $F(0)=0$，即证 $F(a)>F(0)$.

下证 $F'(x)>0$.

$$F'(x)=2\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]\cdot f(x)-f^3(x)=f(x)\cdot\left[2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)\right]$$

再令 $g(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)$，$g(0)=0$　　$g'(x)=2f(x)\cdot[1-f'(x)]>0$

所以当 $x>0$ 时，$g(x)$ 单调递增，从而 $g(x)>g(0)=0$，

$F'(x)=f(x)\cdot g(x)>0$，得当 $x>0$ 时，$F(x)$ 单调增加，即 $F(a)>F(0)$，得证

五、积分上限函数的导数

例 3　设 $f(x)$在$[a,\ b]$上连续，证明：$2\int_a^b f(x)\left[\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2$.

证　由 $f(x)$在$[a,\ b]$上连续知 $f(x)$在$[a,\ b]$上可积，

令 $F(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$，　则 $F'(x)=-f(x)$，　$F(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，　$F(b)=0$

$$\text{左端}=2\int_a^b f(x)\left[\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=2\int_a^b f(x)F(x)\mathrm{d}x$$

$$=-2\int_a^b F(x)F'(x)\mathrm{d}x=-2\int_a^b F(x)\mathrm{d}F(x)$$

$$=-F^2(x)\Big|_a^b=F^2(a)-F^2(b)=\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2=\text{右端}.$$

六、定积分的应用

1. 直角坐标系中的平面图形的面积

在平面直角坐标系中求由曲线$y=f(x)$，$y=g(x)$和直线$x=a$，$x=b$围成图形的面积A，其中函数$f(x)$，$g(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(x)\geq g(x)$，如图所示.

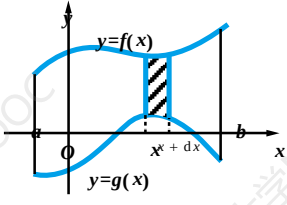
在区间$[a,b]$上任取代表区间$[x,x+\mathrm{d}x]$，在区间两个端点处做垂直于x轴的直线，由于$\mathrm{d}x$非常小，这样介于两条直线之间的图形可以近似看成矩形，因此面积微元可表示为 $\mathrm{d}A=[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$,

于是，所求面积A为 $A=\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x.$

若$f(x)\leq g(x)$，则有 $A=-\int_a^b[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x.$

综合以上两种情况，由曲线$y=f(x)$，$y=g(x)$和直线$x=a$，$x=b$围成图形的面积为：

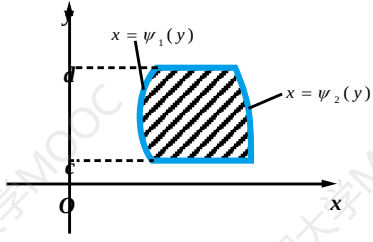
$$A=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x.$$



六、定积分的应用

同样地，由曲线$x = \psi_1(y)$，$x = \psi_2(y)$和直线$y = c$，$y = d\,(c \le d)$围成图形（如图所示）的面积为：

$$A = \int_c^d |\psi_1(y) - \psi_2(y)|\,\mathrm{d}y.$$



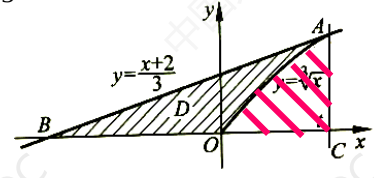
六、定积分的应用　　2013预赛，6分

例1　过曲线$y=\sqrt[3]{x}\,(x\geq 0)$上的点A作切线，使该切线与曲线及x轴所围成的平面图形的面积为$\frac{3}{4}$，求A点的坐标.

解　设切点A的坐标为$(t,\sqrt[3]{t})$，　$y'|_{x=t}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}|_{x=t}=\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}$

曲线过A点的切线方程为　$y-\sqrt[3]{t}=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}(x-t)$,

令$y=0$，可得切线与x轴交点B的横坐标$x_0=-2t$,



设A在x轴上的投影点为C，　$S=\frac{1}{2}\sqrt[3]{t}\cdot[t-(-2t)]-\int_0^t\sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}t\sqrt[3]{t}$

$\frac{3}{4}t\sqrt[3]{t}=\frac{3}{4}\Rightarrow t=1.$　故A的坐标为$(1,1)$.

六、定积分的应用

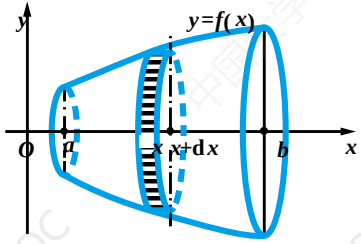
2.旋转体的体积

由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体称为旋转体，这条直线称为旋转轴. 如圆柱、圆锥、圆台、球体都是旋转体.

设一旋转体由连续曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a$，$x = b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成（如图所示），体积微元

$$\mathrm{d}V_x = \pi[f(x)]^2\mathrm{d}x,$$

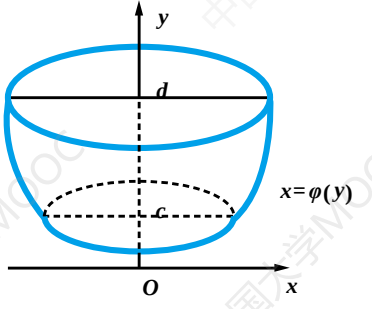
则旋转体的体积为 $V_x = \pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$



六、定积分的应用

类似地，如图所示，由连续曲线 $x=\varphi(y)$，直线 $y=c$，$y=d$ 及 y 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的旋转体，其体积公式为

$$V_y=\pi\int_c^d \varphi^2(y)\mathrm{d}y.$$



六、定积分的应用

例2　设抛物线$y = ax^2 + bx + 2\ln c$过原点，当$0 \le x \le 1$时，$y \ge 0$，又已知该抛物线与x轴及直线$x = 1$所围成图形的面积为$\frac{1}{3}$，试确定a, b, c，使此图形绕x轴旋转一周而成的旋转体的体积V最小.

解：因抛物线过原点，故$c = 1$.　则$y = ax^2 + bx$

由题设有　$\int_0^1 (ax^2 + bx)\mathrm{d}x = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{1}{3}$,　即$b = \frac{2}{3}(1 - a)$,

$$V = \pi\int_0^1 (ax^2 + bx)^2\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 (a^2x^4 + 2abx^3 + b^2x^2)\mathrm{d}x$$

$$= \pi\left(\frac{1}{5}a^2x^5 + \frac{1}{2}abx^4 + \frac{1}{3}b^2x^3\right)\Big|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{3}b^2\right)$$

$$V = \pi\int_a^b y^2\mathrm{d}x$$

六、定积分的应用

设抛物线$y = ax^2 + bx + 2\ln c$过原点，当$0 \le x \le 1$时，$y \ge 0$，又已知该抛物线与x轴及直线$x = 1$所围成图形的面积为$\frac{1}{3}$，试确定a, b, c，使此图形绕x轴旋转一周而成的旋转体的体积V最小.

把$b = \frac{2}{3}(1-a)$代入得 $V = \pi\left[\frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{3}a(1-a) + \frac{1}{3}\times\frac{4}{9}(1-a)^2\right]$

令 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a} = \pi\left[\frac{2}{5}a + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}a - \frac{8}{27}(1-a)\right] = 0$, 得 $a = -\frac{5}{4}$,

代入b的表达式得$b = \frac{3}{2}$，此时可验证$y = -\frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{1}{4}x(6-5x) \ge 0, (0 \le x \le 1)$

又因 $\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}a^2}\right|_{a=-\frac{5}{4}} = \pi\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3} + \frac{8}{27}\right) = \frac{4}{135}\pi > 0$及实际情况，

故当$a = -\frac{5}{4}, b = \frac{3}{2}, c = 1$时，体积最小.



END

05 积分上限函数的导数

06 定积分的应用

中国大学MOOC