全国大学生
数学竞赛
提高课程



第四章 一元函数积分学

中国大学MOOC



内容

03 定积分的换元法

04 定积分的分部积分公式

中国大学MOOC

三、定积分的换元法

定积分的换元法

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，函数 $x = \varphi(t)$ 满足条件

（1）当 $t \in [\alpha,\beta]$（或$[\beta,\alpha]$）时，$a \le \varphi(t) \le b$，

（2）$\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$（或$[\beta,\alpha]$）上有连续的导数，且 $\varphi'(t) \ne 0$，

（3）$\varphi(\alpha) = a$，$\varphi(\beta) = b$，

则有定积分换元公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

三、定积分的换元法

注：

1 与不定积分换元法不同， 定积分在换元后不需要把变量还原为原来的函数，只要把最终的数值计算出来即可.

2 采用换元法计算定积分时，换元一定要换限.

中国大学MOOC

三、定积分的换元法

例1　计算定积分 $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^{x}}{1+\cos^{2}x}dx$.

解　$I=\int_{-\pi}^{0}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^{x}}{1+\cos^{2}x}dx+\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^{x}}{1+\cos^{2}x}dx=I_1+I_2$

$I_1=-\int_{\pi}^{0}\frac{(-t)\sin(-t)\cdot\arctan e^{-t}}{1+\cos^{2}(-t)}dt$　　令 $x=-t$

$=\int_{0}^{\pi}\frac{t\sin t\cdot\arctan e^{-t}}{1+\cos^{2}t}dt=\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^{2}x}\arctan e^{-x}dx$

$I_2=\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^{2}x}\arctan e^{x}dx$　　$\therefore I=\int_{0}^{\pi}(\arctan e^{x}+\arctan e^{-x})\frac{x\sin x}{1+\cos^{2}x}dx$

三、定积分的换元法

计算定积分 $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^{x}}{1+\cos^{2}x}dx.$

$$I=\int_{0}^{\pi}(\arctan e^{x}+\arctan e^{-x})\frac{x\sin x}{1+\cos^{2}x}dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^{2}x}dx$$

理由如下　　设 $f(x)=\arctan e^{x}+\arctan e^{-x}$,

则 $f'(x)=\frac{e^{x}}{1+e^{2x}}+\frac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}}=\frac{e^{x}}{1+e^{2x}}-\frac{e^{x}}{1+e^{2x}}=0$

所以 $f(x)=C$,　　令 $x=0$, 得 $C=\frac{\pi}{2}$.　　故 $f(x)=\frac{\pi}{2}$

$$I=\int_{0}^{\pi}(\arctan e^{x}+\arctan e^{-x})\frac{x\sin x}{1+\cos^{2}x}dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^{2}x}dx$$

三、定积分的换元法

计算定积分 $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^{x}}{1+\cos^{2}x}dx.$

设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，则 $\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^{2}x}dx=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^{2}x}dx$$

$$=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2}\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^{3}}{8}.$$

三、定积分的换元法

拓展　设$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，证明：$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$

证　设$x = \pi - t$，则$\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$，

左端 $= -\int_{\pi}^{0} (\pi - t) f[\sin(\pi - t)]\mathrm{d}t$

$= \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \pi f(\sin t)\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} tf(\sin t)\mathrm{d}t$

$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x$　　$2\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$

故$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$

三、定积分的换元法

例2　设函数$f(x)$连续，$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，$A$为常数，求$g'(x)$并讨论$g'(x)$在$x=0$处的连续性.

令$u=xt$，则$\mathrm{d}t=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}u$

解　$g(0)=\int_0^1 f(0)\mathrm{d}t=f(0)=0$，　由题设$f(0)=0$，

令$u=xt$，得　$g(x)=\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}$，$x\neq 0$.

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$$

$x\neq 0$时，$g'(x)=\left(\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}\right)'=\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$，

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

三、定积分的换元法

设函数$f(x)$连续，$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，$A$为常数，求$g'(x)$并讨论$g'(x)$在$x=0$处的连续性.

$$g'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2},\quad x\neq 0.$$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$$

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}-0}{x}$$

$$g(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(0+x)-g(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}.$$

三、定积分的换元法

设函数$f(x)$连续，$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，$A$为常数，求$g'(x)$并讨论$g'(x)$在$x=0$处的连续性.

$$\lim_{x\to 0} g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\frac{A}{2}$$



$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$$

$$=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=g'(0).$$

$$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{A}{2}, & x=0\end{cases}$$

从而知$g'(x)$在$x=0$处连续.

四、定积分的分部积分公式

定积分的分部积分公式

设$u(x),v(x)$在$[a,b]$上具有连续的导数，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

简记为 $$\int_a^b u\mathrm{d}v = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u.$$

中国大学MOOC

四、定积分的分部积分公式

例 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x = _____.$

解 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+\cos x}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+\cos x}\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}e^x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+\cos x}\mathrm{d}x + \frac{e^x \sin x}{1+\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \frac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+\cos x}\mathrm{d}x + \frac{e^x \sin x}{1+\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\frac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}$$



END

03 定积分的换元法

04 定积分的分部积分公式

中国大学MOOC