全国大学生
数学竞赛
提高课程

02

第四章 一元函数积分学

中国大学MOOC



内容

01 利用定积分定义计算

02 有关定积分的性质

中国大学MOOC

一、利用定积分定义计算

1.定积分定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

1. 定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$是一个数值，它只与被积函数$f(x)$和积分区间$[a,b]$有关，而与积分变量的符号无关，即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u.$

2. 定积分与区间的分法和每个小区间内ξ_i的选取无关.

注：

一、利用定积分定义计算

按照定积分的定义，记号$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$中的a,b应满足$a<b$，为了研究的方便，我们可以合理地规定：

（1）当$a=b$时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$;

（2）当$a>b$时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

注：

一、利用定积分定义计算

2.定积分存在的条件

（1）函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则函数$y=f(x)$在$[a,b]$上可积；

（2）函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上除有有限个第一类间断点外处处连续，则函数 $y=f(x)$ 在区间$[a,b]$ 上可积.

中国大学MOOC

一、利用定积分定义计算

例 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n^2+2}+\dfrac{\sin\frac{3\pi}{n}}{n^2+3}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right)=$ _____.

ch1第2讲

中国大学MOOC

七、利用定积分定义求极限

例 1　求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$.

解　因为 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{n}}+\cdots+\dfrac{1}{1+\dfrac{n}{n}}\right]\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{i}{n}}\cdot\dfrac{1}{n}$

取 $\xi_i=\dfrac{i}{n}$，则得被积函数为 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，积分区间 $[0,1]$，

于是 $I=\int_0^1\dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2$.

一、利用定积分定义计算

例 2　设 $A_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\pi}{4} - A_n\right)$.

解　因为 $A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+i^2} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{1+\dfrac{i^2}{n^2}}$，　令 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$，

所以　$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \arctan x\,|_0^1 = \dfrac{\pi}{4}$.　　记 $x_i = \dfrac{i}{n}$，则 $x_i - x_{i-1} = \dfrac{1}{n}$，

$$A_n = \frac{1}{n}\left[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\right]$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} f(x_1)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x_2)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x_n)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i)\mathrm{d}x.$$

设 $A_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\pi}{4} - A_n\right)$.

$$A_n = \int_{x_0}^{x_1} f(x_1)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x_2)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x_n)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i)\mathrm{d}x.$$

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_i)\mathrm{d}x = \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i)]\mathrm{d}x,$$

则 $J_n = n\left(\dfrac{\pi}{4} - A_n\right) = n\sum\limits_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i)]\mathrm{d}x,$

由拉格朗日中值定理，$\exists \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$使得 $J_n = n\sum\limits_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\xi_i)(x - x_i)\mathrm{d}x$

记 m_i，M_i分别是$f'(x)$在$[x_{i-1}, x_i]$上的最小值和最大值，则$m_i \le f'(\xi_i) \le M_i$，

$$m_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_i)\mathrm{d}x \le \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\xi_i)(x - x_i)\mathrm{d}x \le M_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_i)\mathrm{d}x$$

一、利用定积分定义计算

设 $A_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\pi}{4} - A_n\right)$.

$$m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i)\mathrm{d}x \le \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\xi_i)(x - x_i)\mathrm{d}x \le M_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i)\mathrm{d}x$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

所以 $\exists \eta_i \in (x_{i-1},\ x_i)$，使得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\xi_i)(x - x_i)\mathrm{d}x = f'(\eta_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i)\mathrm{d}x$$

$$= f'(\eta_i)\frac{(x - x_i)^2}{2}\Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = -f'(\eta_i)\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2}.$$

于是，有 $J_n = -\dfrac{n}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} f'(\eta_i)(x_i - x_{i-1})^2 = -\dfrac{n}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} f'(\eta_i)\dfrac{1}{n^2} = -\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n} f'(\eta_i)$.

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\pi}{4} - A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} J_n = -\dfrac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}[f(1) - f(0)] = \dfrac{1}{4}$.

解释 $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\xi_i)(x-x_i)\mathrm{d}x$

记 m_i，M_i 分别是 $f'(x)$ 在 $[x_{i-1},\ x_i]$ 上的最小值和最大值，则 $m_i \le f'(\xi_i) \le M_i$，

$$m_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\mathrm{d}x \le \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\xi_i)(x-x_i)\mathrm{d}x \le M_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\mathrm{d}x$$

所以 $\exists \eta_i \in (x_{i-1},\ x_i)$，使得 $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\xi_i)(x-x_i)\mathrm{d}x = f'(\eta_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\mathrm{d}x$

另解 因为 $x-x_i<0$，不变号

根据广义积分中值定理得 $\exists \eta_i \in (x_{i-1},\ x_i)$，使得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(\xi_i)(x-x_i)\mathrm{d}x = f'(\eta_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\mathrm{d}x$$

广义积分中值定理　设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)$ 不变号，则存在 $\xi \in [a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

二、有关定积分的性质

定积分的性质

性质1 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

此性质还可以推广到任意有限个函数和与差的情况，即

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x \pm \cdots \pm \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

性质2 $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ （k为常数）.

性质3 设a,b,c是三个任意的实数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

二、有关定积分的性质

定积分的性质

性质4 （保号性）若在区间 $[a,b]$ 上有 $f(x)\geq 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

推论1 （保序性）若在区间 $[a,b]$ 上有 $f(x)\leq g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

推论2 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，则 $|f(x)|$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，且

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

中国大学MOOC

二、有关定积分的性质

定积分的性质

性质5 （估值定理）设 M 和 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的最大值和最小值，则

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a).$$

性质6 （积分中值定理）设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，则在区间$[a,b]$上至少存在一点ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

二、有关定积分的性质

定积分的性质

性质7 （广义积分中值定理）

设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，且$g(x)$不变号，则至少存在一点$\xi\in[a,b]$，使得$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

中国大学MOOC

二、有关定积分的性质

例 1　设 $f(x)$ 是连续函数，且满足 $f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-2$，则 $f(x)=$ _____.

解　设 $A=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，则 $f(x)=3x^2-A-2$，

等式两端积分得　$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2(3x^2-A-2)\mathrm{d}x$

$A=\int_0^2 3x^2\mathrm{d}x-\int_0^2 A\mathrm{d}x-\int_0^2 2\mathrm{d}x$　　$A=x^3\Big|_0^2-2A-4$

$A=4-2A$　　移项解得　$A=\dfrac{4}{3}$

故 $f(x)=3x^2-\dfrac{10}{3}$.

二、有关定积分的性质

例 2　设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x) > 0$，则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

分析　即证 $\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} = f(\xi)$，只须证 $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \le M$.

证　因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M 和最小值 m，

即　$m \le f(x) \le M$.

由 $g(x) > 0$ 知 $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$,

二、有关定积分的性质

由 $g(x)>0$ 知 $mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x)$,

定积分保序性

等式两端同时积分得

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

从而 $$m\le\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\le M$$

对 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上使用介值定理得至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,

使得 $$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$$ 结论得证.



END

01 利用定积分定义计算

02 有关定积分的性质

中国大学MOOC