全国大学生
数学竞赛
提高课程

01

第四章 一元函数积分学

中国大学MOOC



内容

01 不定积分的第一换元法

02 不定积分的第二换元法

03 不定积分的分部积分公式

中国大学MOOC

一、不定积分的第一换元法

第一换元法

设 $f(t)$有原函数$F(t)$,且$u=\varphi(x)$是可导函数,则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = F[\varphi(x)]+C$$

该公式称为第一换元公式.

注 上述求不定积分的方法称为第一换元积分法,又称为凑微分法.

中国大学MOOC

一、不定积分的第一换元法

常用凑微分公式

(1) $\int f(au+b)\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\int f(au+b)\mathrm{d}(au+b),\ (a \neq 0);$

(2) $\int f(au^n+b)u^{n-1}\mathrm{d}u = \frac{1}{na}\int f(au^n+b)\mathrm{d}(au^n+b),\ (a \neq 0, n \neq 0);$

(3) $\int f(a^u+b)a^u\mathrm{d}u = \frac{1}{\ln a}\int f(a^u+b)\mathrm{d}(a^u+b),\ (a > 0, a \neq 1);$

(4) $\int f(\sqrt{u})\frac{1}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = 2\int f(\sqrt{u})\mathrm{d}(\sqrt{u});$

(5) $\int f(\frac{1}{u})\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u = -\int f(\frac{1}{u})\mathrm{d}(\frac{1}{u});$

中国大学MOOC

一、不定积分的第一换元法

(6) $\int f(\ln u)\frac{1}{u}\mathrm{d}u = \int f(\ln u)\mathrm{d}(\ln u)$;

(7) $\int f(\sin u)\cos u\mathrm{d}u = \int f(\sin u)\mathrm{d}(\sin u)$;

(8) $\int f(\cos u)\sin u\mathrm{d}u = -\int f(\cos u)\mathrm{d}(\cos u)$;

(9) $\int f(\tan u)\sec^2 u\mathrm{d}u = \int f(\tan u)\mathrm{d}(\tan u)$;

(10) $\int f(\arcsin u)\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u = \int f(\arcsin u)\mathrm{d}(\arcsin u)$;

(11) $\int f(\arctan\frac{u}{a})\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\int f(\arctan\frac{u}{a})\mathrm{d}(\arctan\frac{u}{a}),\ (a>0)$;

(12) $\int \frac{f'(u)}{f(u)}\mathrm{d}u = \ln\left|f(u)\right| + C$.

一、不定积分的第一换元法

例1　不定积分 $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x =$ _____.

解法1　$I = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2+(x-\frac{1}{x})^2}\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}(x-\frac{1}{x})+C.$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

一、不定积分的第一换元法

不定积分 $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x = _____$.

解法1 $I = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}(x-\frac{1}{x}) + C.$

解法2 $I = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\mathrm{d}x$$

推荐解法1

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}x-1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}x+1) + C.$$

2010决赛，5分

例 2　已知 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ 内满足 $f'(x)=\dfrac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x}$，求 $f(x)$.

解　$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x)$

$$=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\left(1-\sin x\cos x\right)=\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)$$

$$=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\left[1-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\right]=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\left\{1-\frac{1}{2}\left[1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]\right\}$$

$$=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\left[\frac{1}{2}+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]$$

令 $u=\dfrac{\pi}{4}-x$

一、不定积分的第一换元法

$f'(x)=\dfrac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x}$，求 $f(x)$.

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\left[\frac{1}{2}+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]}$$

令 $u=\dfrac{\pi}{4}-x$　　令 $t=\sin u$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}u}{\cos u\cdot\left(\frac{1}{2}+\sin^2 u\right)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}\sin u}{\cos^2 u\cdot\left(\frac{1}{2}+\sin^2 u\right)}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}t}{\left(1-t^2\right)\left(\frac{1}{2}+t^2\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\left[\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}-\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\frac{1}{2}}\right]=\frac{\sqrt{2}}{3}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\sqrt{2}\arctan\sqrt{2}t\right]+C$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{6}\ln\left|\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\right|-\frac{2}{3}\arctan\left[\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]+C.$$

中国大学MOOC

二、不定积分的第二换元法

第二换元法

设$x=\psi(t)$是单调的可导函数，且$\psi'(t)\neq 0$，

又设 $f[\psi(t)]\psi'(t)$的一个原函数为$\Phi(t)$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\Phi[\psi^{-1}(x)]+C.$$

$$\int f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\psi(t)} \int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t=\Phi(t)+C \xlongequal{t=\psi^{-1}(x)} \Phi[\psi^{-1}(x)]+C.$$

中国大学MOOC

二、不定积分的第二换元法

注

1.换元积分法在进行换元后，都需要还原为原变量的函数.

2.第二换元积分法经常用于被积函数中出现根式，且无法用直接积分法和第一换元法计算的题目.

中国大学MOOC

二、不定积分的第二换元法

例　设隐函数$y=y(x)$由方程$y^2(x-y)=x^2$所确定，则$\int \frac{\mathrm{d}x}{y^2}=$_____.

分析　$y^2(x-y)=x^2 \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2(x-y)=1$，考虑令$\frac{y}{x}=t$，求$y=y(x)$的参数方程.

解　令$y=tx$，代入方程得$t^2(1-t)x=1$，则$x=\frac{1}{t^2(1-t)}$，$y=\frac{1}{t(1-t)}$，

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{y^2}=\int t^2(1-t)^2\cdot\frac{-2+3t}{t^3(1-t)^2}\mathrm{d}t=\int\frac{3t-2}{t}\mathrm{d}t \qquad \mathrm{d}x=\frac{-2+3t}{t^3(1-t)^2}\mathrm{d}t.$$

$$=3t-2\ln|t|+C=\frac{3y}{x}-2\ln\left|\frac{y}{x}\right|+C.$$

三、不定积分的分部积分公式

分部积分公式

设$u=u(x),v=v(x)$在区间I上都有连续的导数，则有

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

简记为

$$\int uv'\mathrm{d}x=uv-\int u'v\,\mathrm{d}x$$

或

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\,\mathrm{d}u$$

注 如果求$\int uv'\mathrm{d}x$有困难，而求$\int u'v\,\mathrm{d}x$比较容易时，分部积分公式就可以起到化难为易的转化作用.

中国大学MOOC

三、不定积分的分部积分公式

分部积分法的关键在于适当地选择 u 和 $\mathrm{d}v$.

选取 u 和 $\mathrm{d}v$ 一般要考虑下面两点：

(1)由 $v'(x)$ 要容易求得 v；

(2)$\int v\mathrm{d}u$ 要比 $\int u\,\mathrm{d}v$ 容易积分.

中国大学MOOC

三、不定积分的分部积分公式

例1　求不定积分 $I=\int(1+x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx$.

解　$I=\int e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int(x-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx$

$(x+\frac{1}{x})'=1-\frac{1}{x^2}$

$=\int e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int x(1-\frac{1}{x^2})e^{x+\frac{1}{x}}dx=\int e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int x\cdot e^{x+\frac{1}{x}}d(x+\frac{1}{x})$

$=\int e^{x+\frac{1}{x}}dx+\int x de^{x+\frac{1}{x}}=\int e^{x+\frac{1}{x}}dx+xe^{x+\frac{1}{x}}-\int e^{x+\frac{1}{x}}dx$

$=xe^{x+\frac{1}{x}}+C.$

$\int u\,dv=uv-\int v\,du$

三、不定积分的分部积分公式

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

例2　计算不定积分 $\int x\arctan x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$.

解　$\int x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)\mathrm{d}(1+x^2)$

$$= \frac{1}{2}\left[(1+x^2)\ln(1+x^2) - \int (1+x^2)\cdot\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x\right] + C = \frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2 + C.$$

则原式 $= \int \arctan x\,\mathrm{d}\left[\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2\right]$

$$= \left[\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2\right]\arctan x - \frac{1}{2}\int\left[\ln(1+x^2) - \frac{x^2}{1+x^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2\right]\arctan x - \frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

三、不定积分的分部积分公式

计算不定积分 $\int x \arctan x \ln(1+x^2)\mathrm{d}x.$

$$= \left[\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2\right]\arctan x - \frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$\int \ln(1+x^2)\mathrm{d}x = x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + C$$

$$\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = x - \arctan x + C$$

故 $$I = \frac{1}{2}\arctan x\left[(1+x^2)\ln(1+x^2) - x^2 - 3\right] - \frac{x}{2}\ln(1+x^2) + \frac{3}{2}x + C.$$



END

01 不定积分的第一换元法

02 不定积分的第二换元法

03 不定积分的分部积分公式

中国大学MOOC