全国大学生
数学竞赛
提高课程




# 第三章 微分中值定理与导数应用

中国大学MOOC



# 内容

07 有关单调性

08 一元函数的极值与最值

中国大学MOOC

# 六、有关单调性

## 函数的单调性

设函数$f(x)$在区间$I$上可导，对一切$x \in I$有

(1) $f'(x) > 0$，则函数$f(x)$在$I$上单调增加；

(2) $f'(x) < 0$，则函数$f(x)$在$I$上单调减少.

更一般性的结论：

设函数$f(x)$在区间$I$内可导，若$f'(x) \geq 0$或$f'(x) \leq 0$（等号仅在有限个点处成立），则函数$f(x)$在$I$内单调增加或单调减少.

中国大学MOOC

# 六、有关单调性

## 讨论单调性的步骤：

(1)确定$f(x)$的定义域；

(2)求$f'(x)$，并求出$f(x)$单调区间所有可能的分界点(包括$f'(x)=0$、导数不存在的点、$f(x)$的间断点)，并根据分界点把定义域分成相应的区间；

(3)判断一阶导数$f'(x)$在各区间内的符号，从而判断函数在各区间中的单调性.

中国大学MOOC

## 六、有关单调性

例　设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$，证明：$\frac{4}{\pi^2} < \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} < \frac{2}{3}$.

分析　$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \frac{2}{3}$，$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \frac{4}{\pi^2}$，证明 $f(x)$ 在 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 单调递减

证　设 $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x}$　$(0 < x < \frac{\pi}{2})$，$\left(\frac{1}{\tan^2 x}\right)' = \left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)' = \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)'$

则　$f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{2\cos x}{\sin^3 x} = \frac{2(x^3 \cos x - \sin^3 x)}{x^3 \sin^3 x}$　①

$x^3 \cos x - \sin^3 x < 0$

$\Leftrightarrow x^3 - \frac{\sin^3 x}{\cos x} < 0$

$\Leftrightarrow x < \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}}$

$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x > 0$

令 $\varphi(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x$　$(0 < x < \frac{\pi}{2})$，

## 六、有关单调性

设 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$，证明：$\dfrac{4}{\pi^2} < \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\tan^2 x} < \dfrac{2}{3}$.

令 $\varphi(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x \quad (0 < x < \dfrac{\pi}{2})$,

则 $\varphi'(x) = \dfrac{\cos^{4/3} x + \dfrac{1}{3}\cos^{-2/3} x \cdot \sin^2 x}{\cos^{2/3} x} - 1 = \dfrac{\dfrac{2}{3}\cos^{4/3} x + \dfrac{1}{3}\cos^{-2/3} x}{\cos^{2/3} x} - 1$

$= \dfrac{2}{3}\cos^{2/3} x + \dfrac{1}{3}\cos^{-4/3} x - 1.$ 由均值不等式得

$\dfrac{2}{3}\cos^{2/3} x + \dfrac{1}{3}\cos^{-4/3} x = \dfrac{1}{3}(\cos^{2/3} x + \cos^{2/3} x + \cos^{-4/3} x)$

$> \sqrt[3]{\cos^{2/3} x \cdot \cos^{2/3} x \cdot \cos^{-4/3} x} = 1$

$\dfrac{a+b+c}{3} > \sqrt[3]{abc} = 1$

## 六、有关单调性

设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$，证明：$\frac{4}{\pi^2} < \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} < \frac{2}{3}$.

$$f'(x) = \frac{2(x^3\cos x - \sin^3 x)}{x^3 \sin^3 x} \qquad ①$$

$$\varphi'(x) = \frac{2}{3}\cos^{2/3} x + \frac{1}{3}\cos^{-4/3} x - 1.$$

所以当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\varphi'(x) > 0$，从而 $\varphi(x)$ 单调递增.

又 $\varphi(0) = 0$，因此 $\varphi(x) > 0$，即 $x^3\cos x - \sin^3 x < 0$.

由①式得 $f'(x) < 0$，从而 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 单调递减.

由于 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x}) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\frac{1}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}) = \frac{4}{\pi^2}$,

## 六、有关单调性

设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$，证明：$\frac{4}{\pi^2} < \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} < \frac{2}{3}$.

$f(x)$在区间$(0, \frac{\pi}{2})$单调递减

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x}\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\tan^2 x - x^2}{x^4}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{(\tan x + x)(\tan x - x)}{x^4} = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\tan x + x}{x} \cdot \frac{\tan x - x}{x^3}\right)$$

$$= 2 \lim_{x \to 0^+} \frac{\tan x - x}{x^3} = 2 \lim_{x \to 0^+} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2 \cos^2 x} = \frac{2}{3},$$

所以当$0 < x < \frac{\pi}{2}$时，有 $\frac{4}{\pi^2} < \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} < \frac{2}{3}$.

## 六、有关单调性

备注

设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$，证明：$\frac{4}{\pi^2} < \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tan^2 x} < \frac{2}{3}$.

令 $\varphi(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$，则 $\varphi'(x) = \frac{2}{3}\cos^{2/3} x + \frac{1}{3}\cos^{-4/3} x - 1$.

由均值不等式得 $\frac{2}{3}\cos^{2/3} x + \frac{1}{3}\cos^{-4/3} x > \sqrt[3]{\cos^{2/3} x \cdot \cos^{2/3} x \cdot \cos^{-4/3} x} = 1$

所以当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\varphi'(x) > 0$，从而 $\varphi(x)$ 单调递增.

$$\frac{a+b+c}{3} > \sqrt[3]{abc} = 1$$

令 $t = \cos^{2/3} x$，设 $g(t) = \frac{2}{3}t + \frac{1}{3}t^{-2} - 1$,

则 $g'(t) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}t^{-3} = \frac{2}{3}(1 - t^{-3}) < 0, \quad t \in (0,1)$.

有 $g(t) > g(1) = 0 \qquad \therefore \varphi'(x) > 0$

# 七、一元函数的极值与最值

**定义**

设函数$f(x)$在点$x_0$的某邻域$U(x_0,\delta)$内有定义，若对于$U(x_0,\delta)$内异于$x_0$的点$x$都满足：

1）$f(x)<f(x_0)$，则称$f(x_0)$为函数的极大值，$x=x_0$称作极大值点；

2）$f(x)>f(x_0)$，则称$f(x_0)$为函数的极小值，$x=x_0$称作极小值点.

极大值和极小值统称为函数的极值，取得极值的点称作极值点.

注（1）函数极值的概念是局部性的；

2）极值只能在区间内部取得，不能在区间端点取得.

# 七、一元函数的极值与最值

## 极值存在的必要条件

若可导函数$y = f(x)$在点$x_0$取得极值，则点$x_0$必是驻点，即$f'(x) = 0$.



说明：

(1)函数的驻点不一定是极值点；

(2)函数在不可导点处也可以能取得极值；

(3)驻点和导数不存在的点都有可能是极值点.

## 极值存在的第一充分条件

设函数$f(x)$在点$x_0$处连续，在$x_0$的某去心邻域$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$内可导，若满足：

(1)当$x_0-\delta<x<x_0$时，$f'(x)>0$；当$x_0<x<x_0+\delta$时，$f'(x)<0$，

则$f(x)$在点$x_0$处取得极大值；

(2)当$x_0-\delta<x<x_0$时，$f'(x)<0$；当$x_0<x<x_0+\delta$时，$f'(x)>0$，

则$f(x)$在点$x_0$处取得极小值；

(3)当$x$在$x_0$点左右邻近取值时，$f'(x)$的符号不发生改变，

则$f(x)$在点$x_0$处不取得极值.

## 极值存在的第二充分条件

设函数$f(x)$在点$x_0$处二阶可导，且$f'(x_0)=0$，则

(1)若$f''(x_0)<0$，则$f(x_0)$是$f(x)$的极大值；

(2)若$f''(x_0)>0$，则$f(x_0)$是$f(x)$的极小值；

(3)若$f''(x_0)=0$，$f(x_0)$可能是极值也可能不是极值.

中国大学MOOC

# 七、一元函数的极值与最值



求极值的步骤：

(1)确定函数的连续区间；

(2)求$f'(x)$，并求出函数的驻点、导数不存在的点；

(3)利用极值存在的充分条件依次判断这些点是否为函数的极值点；

(4)求出各极值点处的函数值，即得函数的全部极值.

中国大学MOOC

## 七、一元函数的极值与最值

例1　设函数$y = y(x)$由$x^3 + 3x^2y - 2y^3 = 2$所确定，求$y(x)$的极值.

**解**　方程两边对$x$求导，得　$3x^2 + 6xy + 3x^2y' - 6y^2y' = 0.$

故$y' = \dfrac{x(x+2y)}{2y^2 - x^2}$，令$y' = 0$，得$x(x+2y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$或$x = -2y.$

将$x = 0$代入所给方程，得 $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$

将$x = -2y$代入所给方程，得 $\begin{cases} x = -2, \\ y = 1. \end{cases}$

## 七、一元函数的极值与最值

设函数$y = y(x)$由$x^3 + 3x^2y - 2y^3 = 2$所确定，求$y(x)$的极值.

$$y' = \frac{x(x + 2y)}{2y^2 - x^2}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

又 $$y'' = \frac{(2y^2 - x^2)(2x + 2xy' + 2y) - (x^2 + 2xy)(4yy' - 2x)}{(2y^2 - x^2)^2},$$

$x = 0$时，$y = -1$，$y' = 0$代入上式得 $y''\big|_{x=0} = -1 < 0$，

$x = -2$时，$y = 1$，$y' = 0$代入上式得 $y''\big|_{x=-2} = 1 > 0$.

故$y(0) = -1$为极大值，$y(-2) = 1$为极小值.

# 七、一元函数的极值与最值

## 闭区间上连续函数的最值



步骤：若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续

(1)求出函数所有可能极值点：驻点和导数不存在的点；

(2)求出函数在驻点、导数不存在的点和区间端点的函数值；

(3)比较这些函数值的大小，最大者即最大值，最小者即最小值.

## 实际应用中的最值

实际问题中，若函数 $f(x)$ 的定义域是开区间，且在开区间内有唯一驻点$x_0$，根据实际问题可知最值必定存在，则唯一驻点即为最值点.

例2　现要设计一个容积为$V$的圆柱体容器. 已知上下两底的材料费为单位面积$a$元，而侧面的材料费为单位面积$b$元. 试给出最节省的设计方案，即高与上、下底的直径之比为何值时所需费用最少？

解　设圆柱体容器的高为$h$，上下底的半径为$r$，则有 $\pi r^2 h = V$，　或$h = \dfrac{V}{\pi r^2}$，

所需费用为 $F(r) = 2a\pi r^2 + 2b\pi rh = 2a\pi r^2 + \dfrac{2bV}{r}$，　$r \in (0,+\infty)$

令 $F'(r) = 4a\pi r - \dfrac{2bV}{r^2} = 0$，　也即 $r^3 = \dfrac{bV}{2a\pi}$.

这时高与底的直径之比为 $\dfrac{h}{2r} = \dfrac{\dfrac{V}{\pi r^2}}{2r} = \dfrac{V}{2\pi}\cdot\dfrac{1}{r^3} = \dfrac{V}{2\pi}\cdot\dfrac{2a\pi}{bV} = \dfrac{a}{b}$.




## 应用案例设计可乐罐

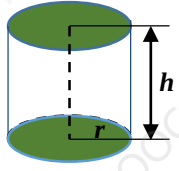
**一罐可乐335ml，如何设计可乐罐尺寸，使得可乐罐成本最低？**

中国大学MOOC

## （一）问题简化与抽象：

**问题：**

一个容积为$V$的有盖圆柱形容器，半径$r$与桶高$h$如何设计，可使所用材料最省？




**表达式：** $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

**结论：**

当容器的半径和高满足$h=2r$ 时，用料最省.

| 说明 | 尺寸 |
| --- | --- |
| 上底厚 | 0.28mm |
| 下底厚 | 0.29mm |
| 侧面厚 | 0.15mm |
| 上盖半径 | 29mm |
| 正圆柱体部分半径 | 33.02mm |
| 正圆柱部分的高 | 102mm |
| 圆台高 | 10mm |
| 整个易拉罐高 | 122.22mm |
| 易拉罐的实际容积 | 365ml |
| 可乐的净含量 | 355ml |

**实际测量数据显示：底面厚度约为侧面厚度的2倍。**

## （二）问题拓展

**问题：**如何修正模型，才能更符合实际？

**假设：**圆柱形容器的底面厚度是侧面厚度的2倍。

**分析：**同样面积，底面用料是侧面用料的2倍。

**问题解决：**

$$S = 4\pi r^2 + 2\pi r h$$

当 $h=4r$ 时，可使所用材料最省.

中国大学MOOC

## 其他要考虑的因素：

- 考虑圆柱形易拉罐，在开启时用力拉伸易变形：实际中为增加刚性，将易拉罐顶设计成圆台.
- 考虑顶端粘合性：圆柱台的坡度最优为$\tan\alpha = \frac{10}{3}$.
- 考虑美观性：直径与高之比最优为黄金分割0.618.
- 考虑耐受冲击力：实际中易拉罐的底部并不是平面，而是一个圆凹槽.









从以上的讨论发现，我们一旦走出了思维定势，就会有许多奇迹的创造。从飞鸟可以造出飞机，从蝙蝠可以联想到电波……

怎么才能突破思维定势呢？

要有“初生牛犊不怕虎”的精神。同学们应该充分发挥这种敢想敢做精神，敢于打破常规，勇于创新。这是当代大学生进入社会创新创业所必备的能力。



因为所处的地位不同，看问题的角度不同，对事物的认识也不同，得出的结论必然是片面的；只有认识到事物的全貌，超越传统的固定思维，跳出框架，才能看到事情的真相。

通过讨论单调性极值，我们能够领悟到人生就像连绵不断的曲线，起起落落是必经之常态，是成长的需要，跌入低谷不气馁，甘于平淡不放任，伫立高峰不张扬，这才是应有的宽广胸怀。我们要学会用运动的观点看待问题，低谷与顶峰只是人生路上的一个转折点。



END

07 有关单调性

08 一元函数的极值与最值

中国大学MOOC