全国大学生
数学竞赛
提高课程

02

第三章 微分中值定理与导数应用

中国大学MOOC



内容

03 利用泰勒公式求极限

04 利用泰勒公式求高阶导数

05 有关泰勒定理的证明题

06 利用泰勒公式求近似值

中国大学MOOC

泰勒定理

1.泰勒公式

设函数$f(x)$在含有x_0的某个开区间(a,b)内具有直到$(n+1)$阶导数，

则对任意$x \in (a,b)$有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

其中$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$，　ξ介于x与x_0之间.

拉格朗日型余项

$$R_n(x) = o[(x - x_0)^n].$$

皮亚诺型余项

泰勒定理

2.麦克劳林公式

设函数 $f(x)$ 在含有 $x=0$ 的某个开区间 (a,b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶导数，

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

拉格朗日型余项

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

皮亚诺型余项

3.常用麦克劳林公式

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}+o(x^{n}),$$

$$\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}+\cdots+(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\cdots+(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}),$$

3.常用麦克劳林公式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1}),$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n),$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{m!}x^n+o(x^n)$$

三、利用泰勒公式求极限

例　设$f(x)$在区间$(-1,1)$内三阶连续可导，满足$f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=0$，$f'''(0)=-1$；又设数列$\{a_n\}$满足$a_1\in(0,1)$，$a_{n+1}=f(a_n)$，$(n=1,2,\cdots)$，严格单调减少，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，计算$\lim\limits_{n\to\infty}na_n^2$.

ch1第2讲

三、利用泰勒公式求极限

例　设$f(x)$有二阶导数连续，且$f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)=6$，

则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}=$_____.

解法1　$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2}f''(\xi)x^2$，$\xi$介于0与$x$之间.

代入已知条件得　$f(x)=\dfrac{1}{2}f''(\xi)x^2$，$\xi$介于0与$x$之间.

所以　$f(\sin^2 x)=\dfrac{1}{2}f''(\xi)\sin^4 x.$

当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$

故　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(\xi)\sin^4 x}{2x^4}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}f''(\xi)=3$

三、利用泰勒公式求极限

设 $f(x)$ 二阶导数连续，且 $f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)=6$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}=$ _____.

解法 2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cos x}{4x^3}$

洛必达法则

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(\sin^2 x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(\sin^2 x)\cdot 2\sin x\cos x}{2x}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}f''(\sin^2 x)=\dfrac{1}{2}f''(0)=3.$

当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$

四、利用泰勒公式求高阶导数

例　设 $f(x)=e^{x}\sin 2x$，求 $f^{(4)}(0)$.

解　将 e^{x} 和 $\sin 2x$ 展开为带有佩亚诺余项的麦克劳林公式，有

$$f(x)=\left[1+x+\frac{1}{2!}x^{2}+\frac{1}{3!}x^{3}+o\left(x^{3}\right)\right]\cdot\left[2x-\frac{1}{3!}(2x)^{3}+o\left(x^{4}\right)\right]$$

$$=2x+2x^{2}+\left(1-\frac{2^{3}}{3!}\right)x^{3}+\left(\frac{2}{3!}-\frac{2^{3}}{3!}\right)x^{4}+o\left(x^{4}\right),$$

直接展开法

间接展开法

$$e^{x}=1+x+\frac{1}{2!}x^{2}+\frac{1}{3!}x^{3}+\cdots+\frac{1}{n!}x^{n}+o\left(x^{n}\right),\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}+\cdots+(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right),\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

四、利用泰勒公式求高阶导数

设 $f(x)=\mathrm{e}^{x}\sin 2x$，求 $f^{(4)}(0)$.

$$f(x)=2x+2x^{2}+\left(1-\frac{2^{3}}{3!}\right)x^{3}+\left(\frac{2}{3!}-\frac{2^{3}}{3!}\right)x^{4}+o\left(x^{4}\right),$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^{2}+\frac{f'''(0)}{3!}x^{3}+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^{4}+o\left(x^{4}\right)$$

所以有 $\dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}=\dfrac{2}{3!}-\dfrac{8}{3!}=-1,$ 即 $f^{(4)}(0)=-24.$

五、有关泰勒定理的证明题

例　设函数$f(x)$在区间$[-1,1]$上具有连续的三阶导数，且$f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$.求证：在开区间$(-1,1)$内至少存在一点x_0，使得$f'''(x_0)=3$.

证　由麦克劳林公式，得

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3,\quad \eta\text{介于}0\text{与}x\text{之间},\quad x\in[-1,1].$$

取$x=1$得　$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)+\frac{1}{3!}f'''(\eta_1),\quad 0<\eta_1<1,$

取$x=-1$，得　$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)-\frac{1}{3!}f'''(\eta_2),\quad -1<\eta_2<0.$

两式相减，得　$f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6.$　即　$\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]=3.$

五、有关泰勒定理的证明题

设函数$f(x)$在区间$[-1,1]$上具有连续的三阶导数，且$f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$.求证：在开区间$(-1,1)$内至少存在一点x_0，使得$f'''(x_0)=3$.

即 $\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]=3.$

由于$f'''(x)$在闭区间$[-1,1]$上连续，因此$f'''(x)$在闭区间$[\eta_1,\eta_2]$上有最大值M和最小值m，从而 $m\le\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]\le M$.

再由连续函数的介值定理，至少存在一点$x_0\in[\eta_1,\eta_2]\subset(-1,1)$，

使得 $f'''(x_0)=\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]=3.$

六、利用泰勒公式求近似值

求方程 $x^2 \sin\frac{1}{x} = 2x - 501$ 的近似值，精确到 0.001.

解 由泰勒公式有 $\sin t = t - \frac{\sin(\theta t)}{2}t^2, \quad 0 < \theta < 1,$

令 $t = \frac{1}{x}$ 得 $\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{\sin\frac{\theta}{x}}{2x^2},$

代入原方程得 $x - \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{x} = 2x - 501,$ 即 $x = 501 - \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{x},$

由此知 $x > 500$，$0 < \frac{\theta}{x} < \frac{1}{500},$ $\left|x - 501\right| = \frac{1}{2}\left|\sin\frac{\theta}{x}\right| \le \frac{1}{2}\cdot\frac{\theta}{x} \le \frac{1}{1000} = 0.0001,$

所以，$x = 501$ 即为满足题设条件的解.



END

03 利用泰勒公式求极限

04 利用泰勒公式求高阶导数

05 有关泰勒定理的证明题

06 利用泰勒公式求近似值

中国大学MOOC

五、有关泰勒定理的证明题

例2　设函数$f(x)$在$[0,1]$上有二阶导数，且有正常数A，B，使得$|f(x)|\le A$，$|f''(x)|\le B$.证明：对任意$x\in[0,1]$，有$|f'(x)|\le 2A+\frac{B}{2}$.

证明　将$f(t)$在x处展为泰勒公式，有

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{f''(\xi)}{2!}(t-x)^2,\quad \xi\text{介于}t\text{与}x\text{之间}$$

令$t=0$得　$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(0-x)^2,\quad \xi\in(0,\ x),$　①

令$t=1$得　$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2,\quad \eta\in(x,1).$　②

②－①得　$f(1)-f(0)=f'(x)+\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2-\frac{f''(\xi)}{2}x^2$

即　$f'(x)=f(1)-f(0)+\frac{f''(\xi)}{2}x^2-\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2.$

七、有关泰勒定理的证明题

设函数$f(x)$在$[0,1]$上有二阶导数，且有正常数A，B使得$|f(x)|\le A$，$|f''(x)|\le B$.证明：对任意$x\in[0,1]$，有$|f'(x)|\le 2A+\frac{B}{2}$.

即 $f'(x)=f(1)-f(0)+\frac{f''(\xi)}{2}x^2-\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2$.

有 $|f'(x)|\le|f(1)|+|f(0)|+|\frac{f''(\xi)}{2}|x^2+|\frac{f''(\eta)}{2}|(1-x)^2$

由$|f(x)|\le A$，$|f''(x)|\le B$，得 $|f'(x)|\le 2A+\frac{B}{2}\left[x^2+(1-x)^2\right]$.

又 $g(x)=x^2+(1-x)^2=2(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$在$[0,1]$上的最大值为1，

所以有 $|f'(x)|\le 2A+\frac{B}{2}$.