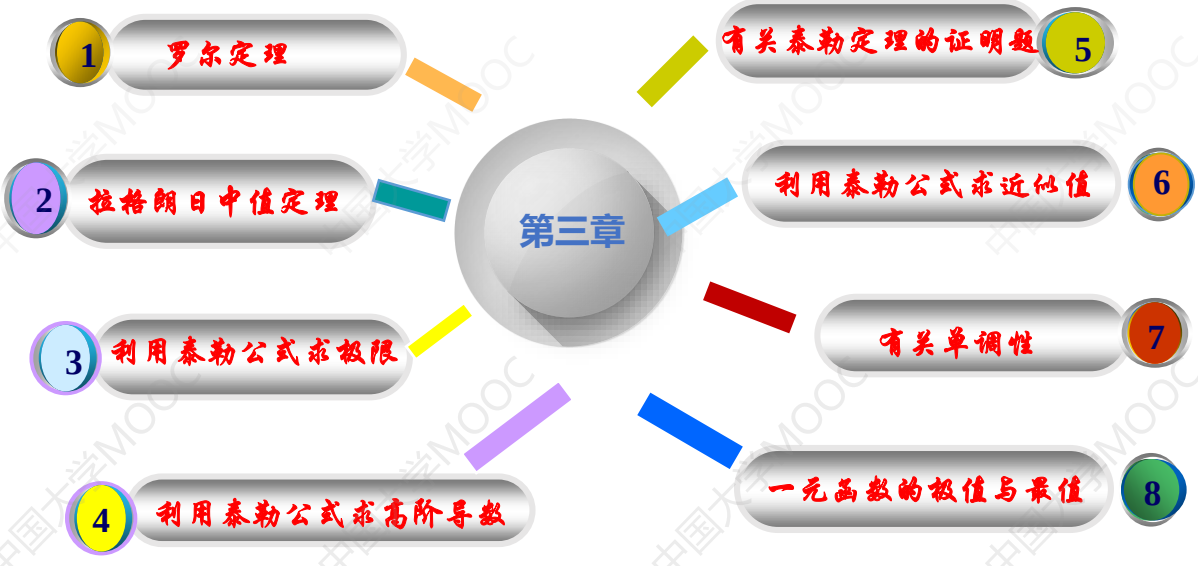
全国大学生
数学竞赛
提高课程

01

第三章 微分中值定理与导数应用

中国大学MOOC

第三章目录


第三章
1 罗尔定理
2 拉格朗日中值定理
3 利用泰勒公式求极限
4 利用泰勒公式求高阶导数
5 有关泰勒定理的证明题
6 利用泰勒公式求近似值
7 有关单调性
8 一元函数的极值与最值



内容

01 罗尔定理

02 拉格朗日中值定理

中国大学MOOC

一、罗尔定理

罗尔定理

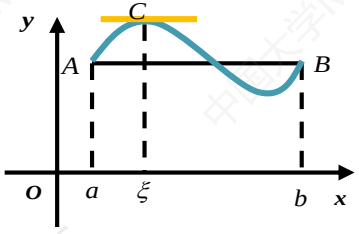
若函数 $y = f(x)$ 满足

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) 在开区间 (a,b) 内可导；

(3) $f(a) = f(b)$.

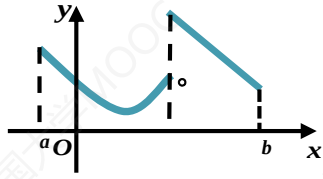
则至少有一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = 0$.



一、罗尔定理

注意：

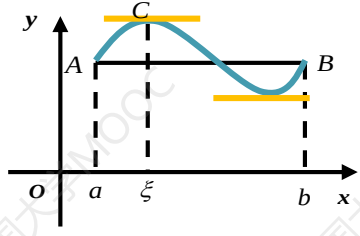
(1)条件并非缺一不可；



(2)罗尔定理的条件充分而非必要.

证明的关键是：ξ 是区间的内点

(3)ξ不唯一.



一、罗尔定理

例　设函数$f(x)$在$[0,1]$连续，在$(0,1)$内可微，且$f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$.

证明：（1）存在$\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$使得$f(\xi)=\xi$；

（2）存在$\eta\in(0,\ \xi)$使得$f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

证　(1) 令$F(x)=f(x)-x$，则$F(x)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上连续，

且有　$F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0$，$F(1)=-1<0$

所以存在一个$\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=\xi$.

一、罗尔定理

设函数$f(x)$在$[0,1]$连续，在$(0,1)$内可微，且$f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$.

证明：（1）存在$\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$使得$f(\xi)=\xi$；

（2）存在$\eta\in(0,\xi)$使得$f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

（2）分析：构造辅助函数

$$f'(x)=f(x)-x+1 \Rightarrow f'(x)-1=f(x)-x$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)-1}{f(x)-x}=1 \Rightarrow \ln[f(x)-x]=x+\ln C$$

$$\Rightarrow e^{-x}[f(x)-x]=C$$

一、罗尔定理

设函数$f(x)$在$[0,1]$连续，在$(0,1)$内可微，且$f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$.

证明：（1）存在$\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$使得$f(\xi)=\xi$；

（2）存在$\eta\in(0,\xi)$使得$f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

（2）令$G(x)=e^{-x}[f(x)-x]$，那么$G(0)=G(\xi)=0$.

这样，存在一个$\eta\in(0,\xi)$，使得$G'(\eta)=0$，

即 $G'(\eta)=e^{-\eta}[f'(\eta)-1]-e^{-\eta}[f(\eta)-\eta]=0$,

也即$f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

二、拉格朗日中值定理

拉格朗日中值定理

若函数 $y = f(x)$ 满足：

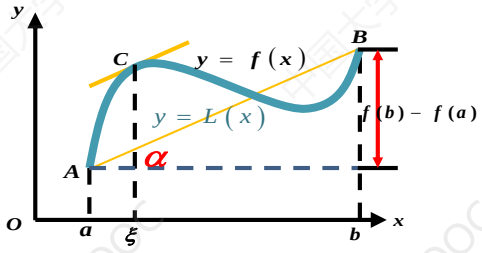
(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) 在开区间 (a,b) 内可导；

则至少有一点 $\xi \in (a,b)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

或 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$



二、拉格朗日中值定理

例 1　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$.

证明：(1) 存在 $x_0 \in (0,1)$，使得 $f(x_0)=2-3x_0$；

(2) 存在 ξ、$\eta \in (0,1)$，且 $\xi \neq \eta$，使得 $[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$.

证　(1) 令 $F(x)=f(x)-2+3x$，

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $F(0)=-2<0$，$F(1)=2>0$.

根据连续函数的介值定理，存在 $x_0 \in (0,1)$，使得 $F(x_0)=0$，

即 $f(x_0)=2-3x_0$.

二、拉格朗日中值定理

设$f(x)$在$[0,1]$上连续，$f(x)$在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$.

证明：(1) 存在$x_0\in(0,1)$，使得$f(x_0)=2-3x_0$;

(2) 存在ξ、$\eta\in(0,1)$，且$\xi\neq\eta$，使得$[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$.

(2) 在区间$[0,x_0]$上利用拉格朗日中值定理，存在$\xi\in(0,1)$，使得

$$\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=f'(\xi)\qquad\Rightarrow\quad f'(\xi)=\frac{2-3x_0}{x_0};$$

在区间$[x_0,1]$上利用拉格朗日中值定理，存在$\eta\in(0,1)$，使得

$$\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=f'(\eta)\quad\Rightarrow\frac{1-2+3x_0}{1-x_0}=f'(\eta)\Rightarrow f'(\eta)=\frac{-1+3x_0}{1-x_0}$$

显然$\xi\neq\eta$　　所以$[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=\dfrac{2(1-x_0)}{x_0}\cdot\dfrac{2x_0}{1-x_0}=4.$

四、拉格朗日中值定理

例2　设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \neq 0$，证明：在区间$[0,1]$上存在三个不同的点$x_1$，$x_2$，$x_3$，使得

$$\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{1+x_1^2}\int_0^{x_1} f(t)\mathrm{d}t + f(x_1)\arctan x_1\right]\Big|_{x_3}$$

$$= \left[\frac{1}{1+x_2^2}\int_0^{x_2} f(t)\mathrm{d}t + f(x_2)\arctan x_2\right](1-x_3).$$

证　令$F(x) = \dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{\arctan x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t}$，

则$F(0)=0$，$F(1)=1$.

且函数$F(x)$在闭区间$[0,1]$上可导，

根据介值定理，存在点$x_3 \in (0,1)$，使$F(x_3)=\dfrac{1}{2}$.

$$\frac{1}{1+x^2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + f(x)\arctan x = \left[\arctan x\cdot\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]'$$

四、拉格朗日中值定理

证明：$\dfrac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \left[\dfrac{1}{1+x_1^2}\int_0^{x_1} f(t)\mathrm{d}t + f(x_1)\arctan x_1\right]x_3$

$F(x) = \dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{\arctan x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t}$,

$F(0)=0,\quad F(1)=1,\quad F(x_3)=\dfrac{1}{2}$

$$F'(x) = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t}\cdot\left[\frac{1}{1+x^2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \arctan x\cdot f(x)\right],$$

在$[0,x_3]$上使用拉格朗日中值定理，存在$x_1\in(0,x_3)$，

使得$F(x_3)-F(0)=F'(x_1)(x_3-0)$

即 $$\frac{1}{2}-0=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t}\cdot\left[\frac{1}{1+x_1^2}\int_0^{x_1} f(t)\mathrm{d}t + f(x_1)\arctan x_1\right](x_3-0)$$

也即 $$\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{1+x_1^2}\int_0^{x_1} f(t)\mathrm{d}t + f(x_1)\arctan x_1\right]x_3;$$

四、拉格朗日中值定理

证明：$\dfrac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \left[\dfrac{1}{1+x_2^2}\int_0^{x_2} f(t)\mathrm{d}t + f(x_2)\arctan x_2\right](1-x_3).$

$$F'(x) = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t}\cdot\left[\frac{1}{1+x^2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \arctan x\cdot f(x)\right],$$

$$F(x) = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\arctan x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t},$$

$F(0)=0,\quad F(1)=1,\quad F(x_3)=\dfrac{1}{2}$

在$[x_3,1]$上使用拉格朗日中值定理，存在$x_2\in(x_3,1)$，

使得$F(1)-F(x_3)=F'(x_2)(1-x_3)$，

即$1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t}\cdot\left[\dfrac{1}{1+x_2^2}\int_0^{x_2} f(t)\mathrm{d}t + f(x_2)\arctan x_2\right](1-x_3),$

也即$\dfrac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \left[\dfrac{1}{1+x_2^2}\int_0^{x_2} f(t)\mathrm{d}t + f(x_2)\arctan x_2\right](1-x_3).$

中国大学MOOC

二、拉格朗日中值定理

例3 设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，且$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\neq 0$. 证明：在$(0,1)$内存在不同的两点$x_1$，$x_2$，使得$\dfrac{1}{f(x_1)}+\dfrac{1}{f(x_2)}=\dfrac{2}{I}$.

分析 $\dfrac{I}{f(x_1)}+\dfrac{I}{f(x_2)}=2$，构造$F(x)=\dfrac{1}{I}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，

则$F'(x_1)=\dfrac{f(x_1)}{I}$，$F'(x_2)=\dfrac{f(x_2)}{I}$

证 设$F(x)=\dfrac{1}{I}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则$F(0)=0$，$F(1)=1$.

由介值定理，存在$\xi\in(0,1)$，使得$F(\xi)=\dfrac{1}{2}$.

对$F(x)$在区间$[0,\xi]$，$[\xi,1]$上分别应用拉格朗日中值定理

二、拉格朗日中值定理

证明：在$(0,1)$内存在不同的两点x_1，x_2，使得$\dfrac{1}{f(x_1)}+\dfrac{1}{f(x_2)}=\dfrac{2}{I}$.

设$F(x)=\dfrac{1}{I}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$F(0)=0$，$F(1)=1$，$F(\xi)=\dfrac{1}{2}$ $\xi\in(0,1)$

$$F'(x_1)=\frac{f(x_1)}{I}=\frac{F(\xi)-F(0)}{\xi}=\frac{\frac{1}{2}}{\xi},\quad x_1\in(0,\xi).\qquad \text{即}\ \frac{f(x_1)}{I}=\frac{\frac{1}{2}}{\xi},$$

$$F'(x_2)=\frac{f(x_2)}{I}=\frac{F(1)-F(\xi)}{1-\xi}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\xi},\quad x_2\in(\xi,1).\qquad \text{即}\ \frac{f(x_2)}{I}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\xi},$$

所以 $\dfrac{I}{f(x_1)}+\dfrac{I}{f(x_2)}=\dfrac{\xi}{\frac{1}{2}}+\dfrac{1-\xi}{\frac{1}{2}}=2$，得 $\dfrac{1}{f(x_1)}+\dfrac{1}{f(x_2)}=\dfrac{2}{I}$.



END

01 罗尔定理

02 拉格朗日中值定理

中国大学MOOC