全国大学生
数学竞赛
提高课程

01

第二章 导数与微分

中国大学MOOC



内容

01 导数的定义

02 导数的计算

中国大学MOOC

一、导数的定义

1.导数定义

设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域内有定义，当自变量x在x_0处有增量Δx时，相应函数的增量为$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 如果当$\Delta x\to 0$时，极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$存在，则称函数$y=f(x)$在点$x_0$处可导，并把这个极限值称为函数$y=f(x)$在点$x_0$处的导数，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

中国大学MOOC

一、导数的定义

2.导数定义其他形式

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

导函数 $$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

一、导数的定义

例　若 $f(1)=0$，$f'(1)$ 存在，求极限

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan 3x}{(e^{x^2}-1)\sin x}.$$

ch1第2讲

中国大学MOOC

六、利用导数定义求极限

例　设$f(x)$在点$x=1$附近有定义，且在点$x=1$可导，$f(1)=0$，$f'(1)=2$.

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2+x\tan x}$.　　$\dfrac{0}{0}$

解　由题设可知 $\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{f(y)-f(1)}{y-1}=\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{f(y)}{y-1}=f'(1)=2$.

令$y=\sin^2 x+\cos x$，那么当$x\to 0$时$y=\sin^2 x+\cos x\to 1$，

故上式有　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{\sin^2 x+\cos x-1}=2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2+x\tan x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2+x\tan x}\right]$$

六、利用导数定义求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2+x\tan x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2+x\tan x}\right]$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2+x\tan x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin^2 x}{x^2}+\dfrac{\cos x-1}{x^2}}{1+\dfrac{\tan x}{x}}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}}{1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}}=2\cdot\frac{1-\dfrac{1}{2}}{2}=\frac{1}{2}.$$

二、导数的计算

1.求导四则运算法则

设函数$u(x),v(x)$在点x处可导，则函数$u(x)\pm v(x)$，

$u(x)\cdot v(x),\dfrac{u(x)}{v(x)}(v(x)\neq 0)$在点 x 处也可导，且

$(1)\left[u(x)\pm v(x)\right]'=u'(x)\pm v'(x)$；　　$(2)\left[u(x)v(x)\right]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

特别地，$\left[Cu(x)\right]'=Cu'(x)$($C$为常数)；

$(3)\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$，特别地，$\left[\dfrac{1}{v(x)}\right]'=-\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}$.

注　法则（1）（2）可以推广到任意有限个可导函数相加减和相乘的情形

$(u\pm v\pm w)'=u'\pm v'\pm w'$　　$(uvw)'=u'vw+v'uw+w'uv$

二、导数的计算

2.复合函数运算法则

若函数$u=\varphi(x)$在点 x 处可导，函数 $y=f(u)$ 在对应点$u=\varphi(x)$ 处可导，

则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 在点 x 处也可导，

且$[f(\varphi(x))]'=f'(u)\cdot\varphi'(x)=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

推广 $y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=\psi(x)$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

二、导数的计算

3.隐函数求导法则

对由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数 $y=f(x)$ 求导数，可以将方程的两边分别对 x 求导数，然后把 y' 解出来.

二、导数的计算

例1　设函数$y=y(x)$由方程$xe^{f(y)}=e^{y}\ln 29$确定，其中f具有二阶导数，且$f'\neq 1$，则$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$_____.

解　先求y'.　方程两边同时关于x求导得

$$e^{f(y)}+x\cdot e^{f(y)}f'(y)y'=e^{y}\ln 29\cdot y'$$

$$y'=\frac{e^{f(y)}}{e^{y}\ln 29-xe^{f(y)}f'(y)}=\frac{e^{f(y)}}{xe^{f(y)}-xe^{f(y)}f'(y)}$$

$$=\frac{1}{x\left[1-f'(y)\right]}$$

二、导数的计算

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^{y}\ln 29$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ _____.

$$y'=\frac{e^{f(y)}}{e^{y}\ln 29-xe^{f(y)}f'(y)}=\frac{1}{x\left[1-f'(y)\right]}$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(y')}{dx}=\left(\frac{1}{x\left[1-f'(y)\right]}\right)'=-\frac{\left[1-f'(y)\right]-xf''(y)\cdot y'}{x^2\left[1-f'(y)\right]^2}$$

$$=\frac{-1+f'(y)+xy'f''(y)}{x^2\left[1-f'(y)\right]^2}=\frac{f'(y)-1+\dfrac{f''(y)}{\left[1-f'(y)\right]}}{x^2\left[1-f'(y)\right]^2}=-\frac{\left[1-f'(y)\right]^2-f''(y)}{x^2\left[1-f'(y)\right]^3}.$$

二、导数的计算

4.由参数方程确定的函数的导数

设参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $t\in(\alpha,\beta)$ 唯一确定函数 $y=f(x)$，其中 $\varphi(t)$，$\psi(t)$ 可导，$\varphi'(t)\neq 0$. 则函数 $y=f(x)$ 可导，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\ (t\in(\alpha,\beta)).$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}.$$



二、导数的计算

例 2　已知 $\begin{cases} x = \ln(1+\mathrm{e}^{2t}), \\ y = t - \arctan \mathrm{e}^{t}, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

解　$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{1 - \dfrac{\mathrm{e}^{t}}{1+\mathrm{e}^{2t}}}{\dfrac{2\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^{2t}}} = \frac{1+\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}}{2\mathrm{e}^{2t}} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2t}+1-\mathrm{e}^{-t}\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2t}+1-\mathrm{e}^{-t}\right)\right)}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\dfrac{1}{2}\left(-2\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-t}\right)}{\dfrac{2\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^{2t}}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(-2\mathrm{e}^{-4t}+\mathrm{e}^{-3t}-2\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-t}\right)$$

二、导数的计算

例3　若曲线 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases} x=t+\cos t \\ \mathrm{e}^{y}+ty+\sin t=1 \end{cases}$ 确定，则此曲线在 $t=0$ 对应点处的切线方程为_____.

$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

解　当 $t=0$ 时，$x=1, y=0$,

对 $x=t+\cos t$ 两边关于 t 求导：$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1-\sin t$,　$\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=1$,

对 $\mathrm{e}^{y}+ty+\sin t=1$ 两边关于 t 求导：

$\mathrm{e}^{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y+t\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\cos t=0$,　$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=-1$,　则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=\left.\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\right|_{t=0}=-1.$

所以切线方程为 $y-0=-(x-1)$，即 $x+y-1=0$.

二、导数的计算

5.高阶导数

若函数 $y=f(x)$ 导数 $f'(x)$ 仍可导，则称函数 $f'(x)$ 的导数为函数 $y=f(x)$ 的二阶导数，记作 y'' 或 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，

即 $f''(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$.

类似地，y''', $y^{(4)}$, $\cdots$, $y^{(n)}$ 或 $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$, $\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}$, $\cdots$, $\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$

二阶及二阶以上的导数统称为函数的高阶导数.

二、导数的计算

高阶导数计算公式

若函数$u=u(x)$, $v=v(x)$在x点处有n阶导数，则有

1) $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$, $\qquad (Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$;

2) 莱布尼兹公式 $(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\dfrac{1}{2!}n(n-1)u^{(n-2)}v''+\cdots$

$$+\frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}$$

二、导数的计算

例4　设函数 $f(x)=(x+1)^n e^{-x^2}$，则 $f^{(n)}(-1)=$ _____.

解　利用莱布尼兹公式，取 $u=(x+1)^n$，$v=e^{-x^2}$，

$u'=n(x+1)^{n-1}$，$u''=n(n-1)(x+1)^{n-2},\cdots$，

$u^{(n-1)}=n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot(x+1)$，$u^{(n)}=n!$

$f^{(n)}(x)=n!\cdot e^{-x^2}+\sum_{n=0}^{n-1} C_n^k[(x+1)^n]^{(k)}(e^{-x^2})^{(n-k)}$，所以 $f^{(n)}(-1)=\dfrac{n!}{e}$.

莱布尼兹公式　$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\dfrac{1}{2!}n(n-1)u^{(n-2)}v''+\cdots$

$$+\frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}$$



END

01 导数的定义

02 导数的计算

中国大学MOOC