全国大学生
数学竞赛
提高课程



第十一章 线性代数

中国大学MOOC



内容

01 行列式计算

02 矩阵计算

03 矩阵的特征值与特征向量

04 二次型

中国大学MOOC

一、行列式计算

常用计算方法

01 上(下)三角法

02 降阶法

03 升阶法

04 拆分法

05 递推法

中国大学MOOC

一、行列式计算

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$



牢记结论

一、行列式计算

例　设a，b，c，d是互不相同的正实数，x，y，z是实数，满足$a^x = bcd$，$b^y = cda$，$c^z = dab$，$d^w = abc$，则$\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -w \end{vmatrix} =$ _____.

解　$a^x b^y c^z d^w = a^3 b^3 c^3 d^3 \Rightarrow a^{x-3} b^{y-3} c^{z-3} d^{w-3} = 1$　所以 $x = y = z = w = 3$.

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

二、矩阵运算

矩阵的幂运算

定义 设A为n阶方阵，k为正整数，则k个A的连乘积称为A的k次幂，记为A^k，即 $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k个}$

性质 $A^k \cdot A^l = A^{k+l}$，$(A^k)^l = A^{kl}$

注 $(AB)^k \neq A^k \cdot B^k$

$$(AB)^k = \underbrace{AB \cdot AB \cdots AB}_{k个} \overset{?}{=} \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k个} \cdot \underbrace{B \cdot B \cdots B}_{k个}$$

二、矩阵运算

1. 矩阵的幂运算

结论 (1) 当 $AB = BA$ 时，有 $(AB)^k = A^k \cdot B^k$；

(2) 当 $AB = BA$ 时，有 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$；

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

当 $AB = BA$ 时，有 $(A+B)^n = A^n + C_n^1 A^{n-1}B + \cdots + C_n^{n-1} AB^{n-1} + B^n$.

若 a、b 为数，则

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

二、矩阵运算

例 1　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ -1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{50}=$ _____.

解　记 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，

$$\boldsymbol{A}^{50}=(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{50}=\lambda^{50}\boldsymbol{E}+50\lambda^{49}\boldsymbol{B}+\frac{\boldsymbol{n(n-1)}}{\boldsymbol{2}}\lambda^{48}\boldsymbol{B}^2+\cdots+\boldsymbol{B}^{50}$$

$$=\lambda^{50}\boldsymbol{E}+50\lambda^{49}\boldsymbol{B}$$

当 $AB=BA$ 时，有 $(A+B)^n=A^n+C_n^1A^{n-1}B+\cdots+C_n^{n-1}AB^{n-1}+B^n$.

二、矩阵运算

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ -1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$，则 $A^{50}=$ _____.

$B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

$$A^{50}=(\lambda E+B)^{50}=\lambda^{50}E+50\lambda^{49}B$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^{50} & 0 & 0\\ 0 & \lambda^{50} & 0\\ 0 & 0 & \lambda^{50}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -50\lambda^{49} & 50\lambda^{49} & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^{50} & 0 & 0\\ 0 & \lambda^{50} & 0\\ -50\lambda^{49} & 50\lambda^{49} & \lambda^{50}\end{bmatrix}.$$

中国大学MOOC

二、矩阵运算

2. 矩阵的秩



定理 (1)若 A 为 $m \times n$ 矩阵，B 为 $m \times s$ 矩阵，则

$$\max\{r(A), r(B)\} \le r(A, B) \le r(A) + r(B);$$

(2)若 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵，则 $r(A \pm B) \le r(A) + r(B)$ ；

(3)若 A 为 $m \times n$ 矩阵，B 为 $n \times s$ 矩阵，则

$$r(A) + r(B) - n \le r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\};$$

(4)若 A 为 $m \times n$ 矩阵，B 为 $n \times s$ 矩阵，且 $AB = 0$，则 $r(A) + r(B) \le n$.

二、矩阵运算

例 2　设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & a\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$，其中 a 为常数，矩阵 B 满足关系式 $AB=A-B+E$，其中 E 是单位矩阵且 $B\neq E$. 若秩 $r(A+B)=3$，试求常数 a 的值.

解　由关系式 $AB=A-B+E$，得 $(A+E)(B-E)=0$.

从而得 $r(A+B)\leq r(A+E)+r(B-E)\leq 3$，

因为 $r(A+B)=3$，所以 $r(A+E)+r(B-E)=3$，

又 $r(A+E)\geq 2$，考虑到 $B\neq E$，所以 $r(B-E)\geq 1$.

故只有 $r(A+E)=2$.

$$A+E=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 3 & 5 & a\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

二、矩阵运算

设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & a\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$，其中 a 为常数，矩阵 B 满足关系式 $AB=A-B+E$，其中 E 是单位矩阵且 $B\neq E$. 若秩 $r(A+B)=3$，试求常数 a 的值.

故只有 $r(A+E)=2$.

$$A+E=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 3 & 5 & a\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 5 & a\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & a-9\\ 0 & -2 & -5\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & a-9\\ 0 & 0 & 13-2a\end{bmatrix}$$

$$2(a-9)=-5\quad\Rightarrow\quad a=\frac{13}{2}.$$

三、矩阵的特征值与特征向量

抽象矩阵求特征值的结论

设λ为A的特征值，则

(1) $k\lambda$为kA的特征值；

(2) λ^m为A^m的特征值；

(3) $f(\lambda)$为$f(A)$的特征值；

(4) A可逆，则λ^{-1}为A^{-1}的特征值；

(5) A可逆，则$\dfrac{|A|}{\lambda}$为A^*的特征值；

特征向量
保持不变

中国大学MOOC

三、矩阵的特征值与特征向量

性质1 设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

(1) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$；(2) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$.

定义 设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，称 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ 为矩阵 A 的迹.

性质2 矩阵 A 与 A^T 有相同的特征值.

证 $|A^T-\lambda E|=|(A-\lambda E)^T|=|A-\lambda E|$

三、矩阵的特征值与特征向量

例1　设λ_1，λ_2,$\cdots$，λ_n是n阶方阵$\boldsymbol{A}$的特征值，$f(x)$为多项式，则矩阵$f(\boldsymbol{A})$的行列式的值为_____.

解　因为$|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$,

所以$|f(\boldsymbol{A})| = f(\lambda_1)f(\lambda_2)\cdots f(\lambda_n)$.

中国大学MOOC

三、矩阵的特征值与特征向量

例2　设n阶方阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. 证明：若存在正整数$k$，使$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$($\boldsymbol{O}$为零矩阵)，则行列式$|\boldsymbol{B}+2017\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.

分析　若$\boldsymbol{B}$可逆，$|\boldsymbol{B}+2017\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}+2017\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})|=|\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{E}+2017\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}|$.

证　由$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$得$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$，

则$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$，　化简可得到　$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

(1) 若$\boldsymbol{B}$可逆，则由$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$得$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$，

从而$(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^k=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{B}^{-1})^k\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，

所以$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$的特征值全为0，　则$\boldsymbol{E}+2017\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$的特征值为1，

三、矩阵的特征值与特征向量

设n阶方阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. 证明：若存在正整数$k$，使$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$（$\boldsymbol{O}$为零矩阵），则行列式$|\boldsymbol{B}+2017\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.

所以$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$的特征值全为$\mathbf{0}$，则$\boldsymbol{E}+2017\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$的特征值为$\mathbf{1}$，

因此$|\boldsymbol{E}+2017\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}|=1$，$|\boldsymbol{E}+2017\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{E}+2017\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.

(2) 若$\boldsymbol{B}$不可逆，则存在无穷多个数t，使$\boldsymbol{B}_t=t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$可逆，且有$\boldsymbol{AB}_t=\boldsymbol{B}_t\boldsymbol{A}$.

利用(1)的结论，有恒等式$|\boldsymbol{B}_t+2017\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}_t|$.

取$t=0$，得$|\boldsymbol{B}+2017\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$.

四、二次型

1. 二次型的概念

定义 含有 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n + a_{33}x_3^2 + \cdots + 2a_{3n}x_3x_n + \cdots + a_{nn}x_n^2$$

称为 n 元二次型.

只含平方项的二次型，即 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$ 称为二次型的**标准形**

在标准形中，完全平方项的系数为 1，−1，0 时，

即 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2$，称为二次型的**规范形**

四、二次型

例 1　已知二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n})^2$，

则 f 的规范型为 _____.

解　令 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$，

$$f(x) = (x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + n\overline{x}^2 - 2n\overline{x}^2$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{n},$$

$$= xAx^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & 1 - \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

已知二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n})^2$，则 f 的规范型为 _____.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{n}-\lambda & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n}-\lambda & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda & \cdots & -\lambda \\ -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n}-\lambda & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n}-\lambda & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot (1-\lambda)^{n-1} = 0,$$

四、二次型

已知二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n})^2$，

则 f 的规范型为 _____.

$$|A - \lambda E| = -\lambda \cdot (1-\lambda)^{n-1} = 0,$$

解得 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 1, \quad \lambda_n = 0$

故 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2$.

四、二次型

2. 正定二次型

定义 实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$，若对任意$(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T\neq 0$，恒有$f(c_1,c_2,\cdots,c_n)>0$，则称二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是正定二次型，对应矩阵$A$称为正定矩阵.

正定性判定

(1) 实二次型$f=X^TAX$正定的充要条件是它的正惯性指数等于n.

(2) 实二次型$f=X^TAX$正定的充要条件是f的矩阵A的特征值全为正.

(3) 实二次型$f=X^TAX$正定的充要条件是A的顺序主子式大于0;

(4) 实二次型$f=X^TAX$正定的充要条件是存在可逆矩阵P，使$A=P^TP$

四、二次型

例2　设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$为两个n阶正定矩阵，求证$\boldsymbol{AB}$正定的充要条件是$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

证　必要性　设$\boldsymbol{AB}$为两个n阶正定矩阵，从而为对称矩阵，即$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{AB}$.

又$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$，所以$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}$，故$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

充分性　因为$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}$，所以$\boldsymbol{AB}$为实对称矩阵.

因为$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$正定矩阵，存在可逆阵$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$，

于是$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$.

所以$(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{AB}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})$,即$(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{AB}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$是正定矩阵.

从而矩阵$(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{AB}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$的特征值为正实数，而$\boldsymbol{AB}$相似于$(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{AB}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$，

故$\boldsymbol{AB}$的特征值全为正实数.于是得$\boldsymbol{AB}$为正定矩阵.

提词：截止到本讲为止，全国大学生数学竞赛提高课程的的内容，我们就全部完成了。在即将结束课程之际，我想用宋代诗人苏轼的名言“博观而约取,厚积而薄发”与同学们共勉，习主席曾经说过：幸福是奋斗出来的，这就给我们指出了努力的方向。一份耕耘一份收获，祝学习进步，竞赛取得满意成绩。同学们再见！

本课程目录

第一章　函数、极限、连续

第二章　导数与微分

第三章　微分中值定理与导数应用

第四章　一元函数积分学

第五章　常微分方程

第六章　无穷级数



全国大学生
数学竞赛
提高课程

中国大学MOOC

本课程目录

第七章　向量代数与空间解析几何

第八章　多元函数微分学

第九章　重积分

第十章　曲线积分与曲面积分

第十一章　线性代数



全国大学生
数学竞赛
提高课程

中国大学MOOC

全国大学生
数学竞赛
提高课程

博观而约取
厚积而薄发

中国大学MOOC

全国大学生
数学竞赛
提高课程

祝学习进步！

中国大学MOOC



END

01 行列式计算

02 矩阵计算

03 矩阵的特征值与特征向量

04 二次型

中国大学MOOC