全国大学生
数学竞赛
提高课程

04

第十章 曲线积分与曲面积分

中国大学MOOC



内容

06 第二类曲面积分

07 高斯公式

中国大学MOOC

六、第二类曲面积分

定义

设Σ为分片光滑的有向曲面，函数$R(x,y,z)$在Σ上有界.将Σ任意划分为n个小块$\Delta S_i(i=1,2,\cdots,n)$，$\Delta S_i$同时表示其面积，$\Delta S_i$在$xOy$平面上的有向投影为$(\Delta S_i)_{xy}$，在$\Delta S_i$上任取一点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$，如果当各小块曲面直径的最大值$\lambda\to 0$时，和式极限$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$存在且唯一，则称此极限值为函数$R(x,y,z)$在有向曲面$\Sigma$上对坐标$x,y$的曲面积分(第二类曲面积分)，记为

$$\iint_{\Sigma}R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

同样可定义

$$\iint_{\Sigma}P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$$

$$\iint_{\Sigma}Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}$$

六、第二类曲面积分

设Σ为光滑的有向曲面，$\vec{n}(x,y,z)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$为$\Sigma$上点$(x,y,z)$处正侧的单位法向量，$\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$是$\Sigma$上有界向量函数，则

$$\iint_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}\left[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

向量表示式

$\mathrm{d}\vec{S}=\vec{n}\mathrm{d}S$

有向面积元素

注 (1) 若Σ为封闭曲面，则表示为$\oiint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$.

(2) 若Σ为光滑或分片光滑曲面，$\vec{F}$在Σ上连续，则$\iint_{\Sigma}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$存在.

(3) 物理意义　流体以流体$\vec{v}$流过Σ的流量$\Phi=\iint_{\Sigma}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$.

六、第二类曲面积分

性质

性质1 (1) 设 α、β 为常数，则 $\iint\limits_{\Sigma}\left(\alpha\vec{F}+\beta\vec{G}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\alpha\iint\limits_{\Sigma}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}+\beta\iint\limits_{\Sigma}\vec{G}\cdot\mathrm{d}\vec{S}.$

性质2 (2) $\iint\limits_{\Sigma^-}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=-\iint\limits_{\Sigma}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

对坐标的曲面积分与曲面所取侧有关



性质3 (3) $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$，且 Σ_1、Σ_2 之间无公共内点，则

$$\iint\limits_{\Sigma}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iint\limits_{\Sigma_1}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}+\iint\limits_{\Sigma_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}.$$

六、第二类曲面积分

计算公式

设有向曲面由Σ：$z=z(x,y)$(单值)给出，Σ在xOy面上的投影区域为D_{xy}，

$z=z(x,y)$在D_{xy}上有一阶连续偏导，$R(x,y,z)$在Σ上连续，则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}} R\left[x,y,z(x,y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$ 上侧取正，下侧取负；

六、第二类曲面积分

注

(1) 有向曲面由 Σ：$x = x(y,z)$(单值) 给出，Σ 在 yOz 面上的投影区域为 D_{yz}，

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm \iint_{D_{yz}} P\left[x(y,z),y,z\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$ 前侧取正，后侧取负；

(2) 有向曲面由 Σ：$y = y(x,z)$(单值) 给出，Σ 在 xOz 面上的投影区域为 D_{xz}，

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \pm \iint_{D_{xz}} Q\left[x,y(x,z),z\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x,$$ 右侧取正，左侧取负.

(3) 如果有向曲面分别在 yOz、xOz、yOz 面上投影区域的面积为零，则对坐标曲面积分为零.



六、第二类曲面积分

例　计算 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中$\Sigma$为下半球面$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧，$a>0$.

解　$I=\dfrac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\dfrac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_1+I_2$

若Σ：$x=x(y,z)$(单值)，则

$$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pm\iint\limits_{D_{yz}}P\left[x(y,z),y,z\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$ 前侧$+$，后侧$-$.

Σ_{11}：$x=\sqrt{a^2-(y^2+z^2)}$，后侧；　Σ_{12}：$x=-\sqrt{a^2-(y^2+z^2)}$，前侧；

D_{yz}：$y^2+z^2\le a^2, z\le 0$

六、第二类曲面积分

计算 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中$\Sigma$为下半球面$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧

Σ_{11}：$x=\sqrt{a^2-(y^2+z^2)}$，后侧；Σ_{12}：$x=-\sqrt{a^2-(y^2+z^2)}$，前侧；

$$I_1=\iint\limits_{\Sigma}xdydz=\iint\limits_{\Sigma_{11}}xdydz+\iint\limits_{\Sigma_{12}}xdydz \qquad D_{yz}:\ y^2+z^2\le a^2,z\le 0$$

$$=-\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{a^2-(y^2+z^2)}dydz+\iint\limits_{D_{yz}}\left[-\sqrt{a^2-(y^2+z^2)}\right]dydz$$

$$=-2\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{a^2-(y^2+z^2)}dydz=-2\int_{\pi}^{2\pi}d\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}rdr=-\frac{2}{3}\pi a^3.$$

六、第二类曲面积分

$$I=\frac{1}{a}\iint_{\Sigma} a x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{a}\iint_{\Sigma}(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_1+I_2$$

Σ：$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧

若Σ：$z=z(x,y)$(单值)，则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}} R\left[x,y,z(x,y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad \text{上侧}+,\quad \text{下侧}-.$$

$$I_1=-\frac{2}{3}\pi a^3$$

$$I_2=\frac{1}{a}\iint_{\Sigma}(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{a}\iint_{D_{xy}}\left[a-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}\right]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad D_{xy}:\ x^2+y^2\le a^2$$

$$=\frac{1}{a}\iint_{D_{xy}}\left[2a^2-2a\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}-(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a(2a^2-2a\sqrt{a^2-r^2}-r^2)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{6}a^3.\qquad\therefore\quad I=I_1+I_2=-\frac{\pi}{2}a^3.$$

七、高斯公式

高斯公式

设空间闭区域Ω由分片光滑的闭曲面Σ围成，函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在$\Omega$上具有一阶连续偏导数，则

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\oiint_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

或 $$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\oiint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

其中Σ取外侧，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是$\Sigma$在点$(x,y,z)$处的正法向量方向余弦.

注意：格林公式取边界曲线的正向，高斯公式取边界曲面的外侧

三、高斯公式

例1 设函数$f(x)$具有一阶连续导数，$P=Q=R=f((x^2+y^2)z)$，有向曲面Σ_t是圆柱体$x^2+y^2\le t^2, 0\le z\le 1$的表面，方向朝外.记第二型的曲面积分 $I_t=\iint\limits_{\Sigma_t} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 求极限 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{I_t}{t^4}$.

解 由高斯公式得

$$I_t=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}(2xz+2yz+x^2+y^2)f'((x^2+y^2)z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

由对称性得 $\iiint\limits_{\Omega}(2xz+2yz)f'((x^2+y^2)z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$

$$I_t=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)f'((x^2+y^2)z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t\mathrm{d}r\int_0^1 f'(r^2z)r^3\mathrm{d}z$$

三、高斯公式

$I_t = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^t \mathrm{d}r \int_0^1 f'(r^2 z) r^3 \mathrm{d}z$

$I_t = \iint\limits_{\Sigma_t} P\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$ 求极限 $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{I_t}{t^4}$.

$$= 2\pi \int_0^t \left[\int_0^1 f'(r^2 z) r^3 \mathrm{d}z \right] \mathrm{d}r$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{I_t}{t^4} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2\pi \int_0^t \left[\int_0^1 f'(r^2 z) r^3 \mathrm{d}z \right] \mathrm{d}r}{t^4} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2\pi \int_0^1 f'(t^2 z) t^3 \mathrm{d}z}{4t^3}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{2\pi t^3 \int_0^1 f'(t^2 z) \mathrm{d}z}{4t^3} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\pi}{2} \int_0^1 f'(t^2 z) \mathrm{d}z = \lim_{t\to 0^+} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{t^2} \int_0^1 f'(t^2 z) \mathrm{d}(t^2 z)$$

$$= \frac{\pi}{2} \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^2} \cdot f(t^2 z)\Big|_{z=0}^{z=1} = \frac{\pi}{2} \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t^2) - f(0)}{t^2} = \frac{\pi}{2} f'(0).$$

三、高斯公式

例2　设Σ是一个光滑封闭曲面，方向朝外.给定第二型曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x^3-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2y^3-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(3z^3-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

试确定曲面Σ，使得积分I的值最小，并求该最小值.

解　记Σ围成的立体为Ω，由高斯公式，

$$I=\iiint_{\Omega}(3x^2+6y^2+9z^2-3)\mathrm{d}V=3\iiint_{\Omega}(x^2+2y^2+3z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

为了使I达到最小，就要求Ω是使得$x^2+2y^2+3z^2-1\le 0$的最大空间区域，

即　$\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+2y^2+3z^2\le 1\right\}$.

所以Ω是一个椭球，Σ是椭球Ω的表面时，积分I最小.

三、高斯公式

给定第二型曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2y^3-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(3z^3-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

试确定曲面Σ，使得积分I的值最小，并求该最小值.

$$I_{\min}=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+2y^2+3z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\qquad \Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+2y^2+3z^2\le 1\right\}.$$

做变换 $\begin{cases} x=u \\ y=\dfrac{v}{\sqrt{2}} \\ z=\dfrac{w}{\sqrt{3}} \end{cases}$，则 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

$$\begin{aligned} I_{\min}&=\frac{3}{\sqrt{6}}\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\le 1}(u^2+v^2+w^2-1)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \\ &=\frac{3}{\sqrt{6}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1(r^2-1)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r \\ &=-\frac{4\sqrt{6}}{15}\pi. \end{aligned}$$

提词：截止到本讲为止，竞赛提高课程的高等数学内容全部完成。希望同学们能够经常复习回顾，使知识掌握更加牢固、运用更加灵活熟练。由于竞赛决赛中涉及线性代数的相关知识点，下一讲我们来学习线性代数的竞赛相关内容，本讲就讲到这里。



END

02 第二类曲面积分

03 高斯公式

中国大学MOOC