全国大学生
数学竞赛
提高课程

03

第十章 曲线积分与曲面积分

中国大学MOOC



内容

05 第一类曲面积分

中国大学MOOC

五、第一类曲面积分

定义

设函数$f(x,y,z)$在光滑曲面Σ上有界，把Σ任意分割成n小块$\Delta S_i (i=1,2,\cdots,n)$

(同时用ΔS_i表示第i小块曲面的面积)；任取点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta S_i$，作和

$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$. 记$\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta S_i$的直径$\}$，若极限$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$

存在，则称此极限值为函数$f(x,y,z)$在曲面Σ上对面积的曲面积分，也

称为第一类曲面积分，即

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

五、第一类曲面积分

注 (1) 若Σ为闭曲面，则表示为$\oiint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$.

(2) 曲面形构件S的质量 $M=\iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$.



(3) 存在条件

当$f(x,y,z)$在光滑曲面Σ上连续时，曲面积分存在.

中国大学MOOC

五、第一类曲面积分

性质

性质1 线性性质　设k_1，k_2为常数，则

$$\iint_{\Sigma}[k_1 f(x,y,z) \pm k_2 g(x,y,z)]\,\mathrm{d}S = k_1 \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S \pm k_2 \iint_{\Sigma} g(x,y,z)\,\mathrm{d}S.$$

性质2 对积分区域的可加性　设$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S;$$



性质3 当$f(x,y,z)=1$时，$S = \iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$表示曲面$\Sigma$的面积.

五、第一类曲面积分

计算公式

单值

设光滑曲面$\Sigma: z = z(x, y)$，Σ在xOy面投影区域为D_{xy}，函数$f(x, y, z)$

在Σ上连续，$z = z(x, y)$在D_{xy}上有一阶连续偏导数，则

曲面积元素

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)]\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

五、第一类曲面积分

注 (1) 设曲面 $\Sigma: z = z(x, y)$，则曲面 Σ 的面积为 $S = \iint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

单值

(2) 若 $\Sigma: x = x(y, z)$，则 $\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{yz}} f[x(y, z), y, z]\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

(3) 若 $\Sigma: y = y(x, z)$，则 $\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xz}} f[x, y(x, z), z]\sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z.$

单值

曲面积元素

五、第一类曲面积分

计算步骤

设光滑曲面$\Sigma: z = z(x, y)$，Σ在xOy面投影区域为D_{xy}



一代　将$z = z(x, y)$代入被积函数；

二换　将曲面积元素$\mathrm{d}S$换成$\sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

三投影　将曲面Σ投影到xOy平面得到D_{xy}；

四计算　在D_{xy}上计算二重积分$\iint\limits_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)]\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

五、第一类曲面积分

例1　求曲面$x^2+y^2=az$和$z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\,(a>0)$所围立体的表面积.

解　联立$x^2+y^2=az, z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$,解得两曲面的交线所在平面$z=a$(舍去$z=4a$)，它将表面积分为$S_1$：$x^2+y^2=az$和$S_2$：$z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$

S_1：$z=\dfrac{x^2+y^2}{a}$，xOy平面的投影为：$x^2+y^2\le a^2$

$$S_1=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{2x}{a}\right)^2+\left(\frac{2y}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\frac{4x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$S:z=z(x,y),\quad S=\iint_S \mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

五、第一类曲面积分

求曲面 $x^2+y^2=az$ 和 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\,(a>0)$ 所围立体的表面积.

S_2: $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$，xOy 平面的投影为：$x^2+y^2\le a^2$

$$S_2=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(-\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$S=S_1+S_2=\iint_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{1+\frac{4x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{\sqrt{a^2+4r^2}}{a}r\,\mathrm{d}r+\sqrt{2}\pi a^2=\pi a^2\left(\frac{5\sqrt{5}-1}{6}+\sqrt{2}\right).$$

五、第一类曲面积分

例2　曲线$L_1: y=\frac{1}{3}x^3+2x(0\le x\le 1)$绕直线$L_2: y=\frac{4}{3}x$旋转所生成的旋转曲面的面积为_____.

解　两平面P_s和$P_{s+\mathrm{d}s}$截曲面Σ的截下部分，这部分摊开可以看成一个细长条.这个细长条的长是$2\pi d$，宽是$\mathrm{d}s$，它的面积是$2\pi d\mathrm{d}s$.

即　　$\mathrm{d}S=2\pi d\mathrm{d}s$

曲线L_1上的点$(x_0,\frac{1}{3}x_0^3+2x_0)$到直线$L_2:\frac{4}{3}x-y=0$的距离为

$$d=\frac{\left|\frac{4}{3}x_0-(\frac{1}{3}x_0^3+2x_0)\right|}{\sqrt{1+(\frac{4}{3})^2}}=\frac{\left|x_0^3+2x_0\right|}{5},$$

五、第一类曲面积分

曲线 $L_1: y=\frac{1}{3}x^3+2x\,(0\le x\le 1)$ 绕直线 $L_2: y=\frac{4}{3}x$ 旋转所生成的旋转曲面的面积为_____.

$d=\dfrac{\left|x_0{}^3+2x_0\right|}{5}$　　$\mathrm{d}S=2\pi d\,\mathrm{d}s$

由 $y=\frac{1}{3}x^3+2x$，有 $y'=x^2+2$，所以曲线 $L_1: y=\frac{1}{3}x^3+2x$ 上的弧微分为

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x,\qquad \mathrm{d}S=2\pi\,\frac{(x^3+2x)}{5}\sqrt{1+(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$S=\int_0^1 2\pi\,\frac{(x^3+2x)}{5}\sqrt{1+(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{5}\int_0^1 x(x^2+2)\sqrt{1+(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2\pi}{5}\cdot\frac{1}{4}\int_0^1\sqrt{1+(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}(x^2+2)^2=\frac{\pi}{10}\int_0^1\sqrt{1+(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}\left[1+(x^2+2)^2\right]$$

$$=\frac{\pi}{10}\cdot\frac{2}{3}\left[1+(x^2+2)^2\right]^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{\pi}{15}(10\sqrt{10}-5\sqrt{5})=\frac{\sqrt{5}(2\sqrt{2}-1)}{3}\pi.$$

五、第一类曲面积分

例3　设函数$f(x)$连续，a、b、c为常数，Σ是单位球面$x^2+y^2+z^2=1$，记第一型曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma} f(ax+by+cz)\mathrm{d}S$.求证：$I=2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u)\mathrm{d}u$.

解　由Σ的面积为4π可知：当a,b,c都为零时，等式成立.

$$\iint\limits_{\Sigma} f(ax+by+cz)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma} f(0)\mathrm{d}S=f(0)\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=4\pi f(0),$$

$$2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u)\mathrm{d}u=2\pi\int_{-1}^{1} f(0)\mathrm{d}u=4\pi f(0);$$

当a,b,c不全为零时，可知：

原点到平面$ax+by+cz+d=0$的距离是$\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

五、第一类曲面积分

$\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$，$I=\iint\limits_{\Sigma} f(ax+by+cz)\mathrm{d}S$. 求证：$I=2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u)\mathrm{d}u$.

设平面$P_u: u=\dfrac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$，其中$u$固定，则$|u|$是原点到平面$P_u$的距离，

从而$-1\le u\le 1$.

被积函数取值为$f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u)$,

原点到$P_u: ax+by+cz-\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u=0$

的距离为$\dfrac{|-\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=|u|$

两平面P_u和$P_{u+\mathrm{d}u}$截单位球Σ的截下的部分，这部分摊开可以看成一个细长条. 这个细长条的长是$2\pi\sqrt{1-u^2}$，宽是$\dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$，它的面积是$2\pi\mathrm{d}u$.

$\mathrm{d}S=2\pi\sqrt{1-u^2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}=2\pi\mathrm{d}u$，所以 $I=2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u)\mathrm{d}u$.

五、第一类曲面积分

例4　已知S是空间曲线$\begin{cases} x^2+3y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$，绕$y$轴旋转形成的椭球面的上半部分$(z\geq 0)$(取上侧)，$\Pi$是$S$在点$P(x,y,z)$处的切平面，$\rho(x,y,z)$是原点到切平面$\Pi$的距离，$\lambda$，$\mu$，$\omega$表示$S$的正法向的方向余弦.

计算：(1)$\iint\limits_S \dfrac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$；　　(2)$\iint\limits_S z(\lambda x+3\mu y+\omega z)\mathrm{d}S$.

解　(1)由题设，S的方程为$x^2+3y^2+z^2=1, z\geq 0$.

设(X,Y,Z)为切平面Π上任意一点，

则Π的方程为$x(X-x)+3y(Y-y)+z(Z-z)=0$　即　$xX+3yY+zZ=1$

原点到平面Π的距离$\rho(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9y^2+z^2}}=(1+6y^2)^{-\frac{1}{2}}$.

五、第一类曲面积分

求 $(1)\iint\limits_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$；$(2)\iint\limits_S z(\lambda x+3\mu y+\omega z)\mathrm{d}S$.

S：$x^2+3y^2+z^2=1, z\geq 0$.

由 S：$z=\sqrt{1-x^2-3y^2}$ 知 $z_x=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-3y^2}}, z_y=-\frac{3y}{\sqrt{1-x^2-3y^2}}$

$$\Rightarrow \mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{1+6y^2}}{\sqrt{1-x^2-3y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

又 S 在 xOy 平面上的投影为 $D_{xy}: x^2+3y^2\leq 1$, 故

$$\iint\limits_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1-x^2-3y^2}\cdot\frac{1}{(1+6y^2)^{-\frac{1}{2}}}\frac{\sqrt{1+6y^2}}{\sqrt{1-x^2-3y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(1+6y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_{xy}}6y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_1+I_2$$

五、第一类曲面积分

$$I_1=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

求 (1)$\iint_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$; (2)$\iint_S z(\lambda x+3\mu y+\omega z)\mathrm{d}S$.

令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}r\sin\theta\end{cases}$ (广义极坐标),

$D_{xy}:x^2+3y^2\le 1$

$$I_2=\iint_{D_{xy}}6y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=6\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{3}r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

$$\therefore\quad\iint_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_{xy}}6y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

五、第一类曲面积分

计算：(2)$\iint\limits_S z(\lambda x+3\mu y+\omega z)\mathrm{d}S$.

λ，μ，ω表示S的正法向的方向余弦.

(1) $\iint\limits_S \dfrac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}(1+6y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$

(2)由于S：$x^2+3y^2+z^2=1$，$z\geq 0$上侧，故单位正法向量

$$\vec{n}=\{\frac{x}{\sqrt{x^2+(3y)^2+z^2}},\frac{3y}{\sqrt{x^2+(3y)^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+(3y)^2+z^2}}\},$$

所以$\lambda=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+(3y)^2+z^2}}$，$\mu=\dfrac{3y}{\sqrt{x^2+(3y)^2+z^2}}$，$\omega=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+(3y)^2+z^2}}$，

$$\iint\limits_S z(\lambda x+3\mu y+\omega z)\mathrm{d}S=\iint\limits_S z\cdot\frac{x^2+9y^2+z^2}{\sqrt{x^2+9y^2+z^2}}\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_S z\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x^2+9y^2+z^2}}}\mathrm{d}S=\iint\limits_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

$\rho(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+9y^2+z^2}}$



END

05 第一类曲面积分

中国大学MOOC