全国大学生
数学竞赛
提高课程

02

第十章 曲线积分与曲面积分

中国大学MOOC



内容

02 格林公式(2)

03 曲线积分与路径无关的条件

04 斯托克斯公式

中国大学MOOC

二、格林公式(2)

例　设函数$\varphi(x)$具有连续的导数，在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线C上，曲线积分$\oint_C \dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$的值为常数.

(1)设L为正向闭曲线$(x-2)^2+y^2=1$，证明：$\oint_L \dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0$；

(2)求函数$\varphi(x)$；

(3)设C是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求$\oint_C \dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

二、格林公式(2)

(1) 设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2+y^2=1$，证明：$\oint_L \dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0$；

解 (1) 设 $\oint_C \dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=I$，$C$：围绕原点任意光滑简单闭曲线.

设 L_0 为不经过原点的光滑曲线，使得 $L_0 \cup L_1^-$ (其中 L_1^- 为 L_1 的反向曲线) 和 $L_0 \cup L_2$ 分别组成围绕原点的分段光滑闭曲线 $C_i(i=1,2)$，由曲线积分性质和题设条件

$$\oint_L \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\left[\int_{L_1}+\int_{L_2}\right]\frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$$

$$=\left[\int_{L_2}+\int_{L_0}-\int_{L_0}-\int_{L_1^-}\right]\frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2} \qquad \left[\left(\int_{L_2}+\int_{L_0}\right)-\left(\int_{L_0}+\int_{L_1^-}\right)\right]$$

$$=\left[\oint_{C_2}-\oint_{C_1}\right]\frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=I-I=0$$

二、格林公式(2)

设函数$\varphi(x)$具有连续的导数，在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线C上，曲线积分$\oint_L \dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$的值为常数. (2)求函数$\varphi(x)$;

(2)设 $P(x,y)=\dfrac{2xy}{x^4+y^2}$, $Q(x,y)=\dfrac{\varphi(x)}{x^4+y^2}$.

令 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, 即 $\dfrac{\varphi'(x)(x^4+y^2)-4x^3\varphi(x)}{(x^4+y^2)^2}=\dfrac{2x^5-2xy^2}{(x^4+y^2)^2}$,

$$\Rightarrow \varphi'(x)(x^4+y^2)-4x^3\varphi(x)=2x^5-2xy^2$$

$$\Rightarrow \left[\varphi'(x)+2x\right]y^2+\left[x^4\varphi'(x)-4x^3\varphi(x)-2x^5\right]=0$$

$$\begin{cases}\varphi'(x)+2x=0\\ x^4\varphi'(x)-4x^3\varphi(x)-2x^5=0\end{cases}$$

解得 $\varphi(x)=-x^2$.

二、格林公式(2)

(3) 设C是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求 $\oint_C \dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

(3) 设D为正向闭曲线$C_\delta: x^4+y^2=\delta^2$所围区域，

$$\varphi(x)=-x^2$$

$$\oint_C \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\oint_{C_\delta} \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}.$$

利用格林公式和对称性

$$\oint_{C_\delta} \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\oint_{C_\delta} \frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\frac{1}{\delta^2}\oint_{C_\delta} 2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\delta^2}\iint_D(-4x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

二、格林公式(2)

(2010竞赛预赛,15分)设函数$\varphi(x)$具有连续的导数，在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线C上，曲线积分$\oint_C \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$的值为常数.

(1)设L为正向闭曲线$(x-2)^2+y^2=1$，证明：$\oint_L \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0$；

(2)求函数$\varphi(x)$；

(3)设C是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求$\oint_C \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

(2005年，考研真题)设函数$\varphi(y)$具有连续的导数，在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线L上，曲线积分$\int_L \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$的值恒为同一常数.(1)证明：对右半平面$x>0$内的任意分段光滑简单闭曲线$C$，有$\oint_C \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0$;(2)求函数$\varphi(y)$的表达式.

三、曲线积分与路径无关的条件

定理 设D是单连通区域，函数$P(x,y)$，$Q(x,y)$在D内具有一阶连续偏导数，则以下四个命题等价：



单连通（无洞）

(1) 沿D中任意光滑闭曲线L，有$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$；

(2) 对D中任一曲线L，曲线积分$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$与路径无关，只与起止点有关；

(3) 存在函数$u(x,y)$，满足$\mathrm{d}u(x,y) = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$;

(4) 在D内每一点都有$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

中国大学MOOC

三、曲线积分与路径无关的条件

$P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$在$D$内是某一二元函数$u(x,y)$的全微分，

即 $\mathrm{d}u(x,y) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$

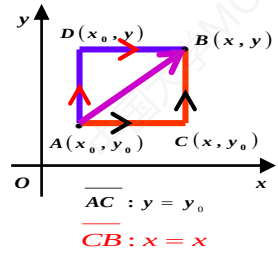
原函数

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,\mathrm{d}y\ ,$$

$$u(x,y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,\mathrm{d}y + \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,\mathrm{d}x$$

其中(x_0,y_0)是G内一适当选定的点.



三、曲线积分与路径无关的条件

例　设函数 $f(t)$ 在 $t \neq 0$ 时一阶连续可导，且 $f(1)=0$，求函数 $f(x^2-y^2)$，使得曲线积分 $\int_L \left[y(2-f(x^2-y^2)) \right] \mathrm{d}x + xf(x^2-y^2)\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 L 为任一不与直线 $y=\pm x$ 相交的分段光滑闭曲线.

解：设 $P(x,y)=y(2-f(x^2-y^2))$，$Q(x,y)=xf(x^2-y^2)$，

由曲线积分与路径无关得 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，即 $(x^2-y^2)f'(x^2-y^2)+f(x^2-y^2)=1$

记 $t=x^2-y^2$，则得 $tf'(t)+f(t)=1$，　即 $\left[tf(t)\right]'=1$，

解得 $tf(t)=t+C$，　由 $f(1)=0$ 可得 $C=-1$，

故 $f(t)=1-\dfrac{1}{t}$，　从而 $f(x^2-y^2)=1-\dfrac{1}{x^2-y^2}$.

四、斯托克斯公式

斯托克斯公式

设Γ为分段光滑的有向闭曲线，Σ是由Γ张成的光滑有向曲面，Γ的正向与Σ的侧符合右手法则，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在曲面Σ上具有一阶连续偏导数，则

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z.$$

或

$$\iint_{\Sigma}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S$$

$$\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\cos\alpha\,\mathrm{d}S,\quad \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=\cos\beta\,\mathrm{d}S,\quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\cos\gamma\,\mathrm{d}S$$

$$=\oint_{L}(P\cos\alpha'+Q\cos\beta'+R\cos\gamma')\mathrm{d}s$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为Σ正侧法向量的方向余弦，$\cos\alpha',\cos\beta',\cos\gamma'$为与Γ正向一致的切向量的方向余弦.

$$\mathrm{d}x=\cos\alpha'\mathrm{d}s,\mathrm{d}y=\cos\beta'\mathrm{d}s,\mathrm{d}z=\cos\gamma'\mathrm{d}s$$

四、斯托克斯公式

注 (1) 当Σ是平面区域D，$F = Pi + Qj$是平面向量场时，斯托克斯公式就是格林公式.

(2) 斯托克斯公式建立了空间曲面上的曲面积分与其边界曲线的曲线积分之间的关系.

(3) 斯托克斯公式也可写作：

$$\oint_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

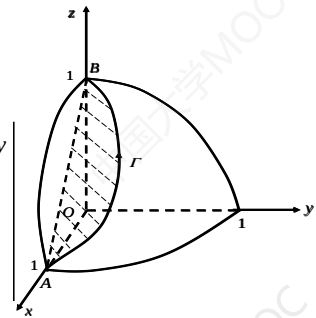


$$\oint_{\Gamma} (P\cos\alpha' + Q\cos\beta' + R\cos\gamma')\mathrm{d}s = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S.$$

中国大学MOOC

四、斯托克斯公式

例　设曲线Γ为在$x^2+y^2+z^2=1$，$x+z=1$，$x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$上从$A(1,0,0)$到$B(0,0,1)$的一段，求曲线积分$I=\int_{\Gamma} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$.



分析　设Γ和Γ_1围成的平面区域Σ，方向按右手法则.

使用stokes公式计算 $\oint_{\Gamma+\Gamma_1} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix}$

解　记Γ_1为从B到A的直线段，$\overrightarrow{BA}=\{1,0,-1\}$，

Γ_1的对称式方程为 $\dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y-0}{0}=\dfrac{z-1}{-1}=t$，则 $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases}$，$t:0\to 1$

四、斯托克斯公式

设曲线Γ为在$x^2+y^2+z^2=1$，$x+z=1$，$x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$上从$A(1,0,0)$到$B(0,0,1)$的一段，求曲线积分$I=\int_{\Gamma} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z.$

$$\int_{\Gamma_1} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_0^1 t\mathrm{d}(1-t)=-\int_0^1 t\mathrm{d}t=-\frac{1}{2},$$

$$\Gamma_1:\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases},\ t:0\to 1$$

设Γ和Γ_1围成的平面区域Σ，方向按右手法则. 由stokes公式得

$$\oint_{\Gamma+\Gamma_1} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}(-1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-1\ \mathrm{d}z\mathrm{d}x+(-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

四、斯托克斯公式

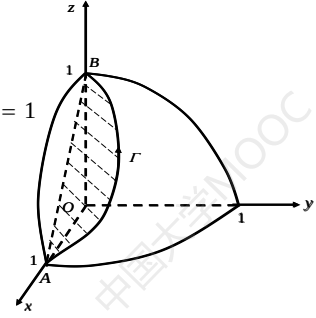
设曲线Γ为在$x^2+y^2+z^2=1$，$x+z=1$，$x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$上从$A(1,0,0)$到$B(0,0,1)$的一段，求曲线积分$I=\int_{\Gamma} y\,\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_1}=-\iint_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

由于Σ在xOz面上的投影为曲线，所以$\iint_{\Sigma}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$

计算$\iint_{\Sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x+z=1\end{cases}$ 消掉z：$x^2+y^2+(1-x)^2=1$，

$$\Rightarrow 2x^2-2x+y^2=0 \Rightarrow 2(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{(x-\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$$

曲线Γ在xOy面上投影的方程为$\dfrac{(x-\frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2})^2}+\dfrac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}=1$



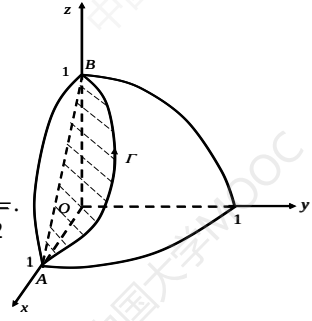
四、斯托克斯公式

设曲线Γ为在$x^2+y^2+z^2=1$，$x+z=1$，$x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$上从$A(1,0,0)$到$B(0,0,1)$的一段，求曲线积分$I=\int_{\Gamma} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$.

$$\int_{\Gamma_1} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_0^1 t\mathrm{d}(1-t)=-\int_0^1 t\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}$$

$$I+\int_{\Gamma_1}=-\iint_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

曲线Γ在xOy面上投影的方程为$\dfrac{(x-\frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2})^2}+\dfrac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}=1$



$$\iint_{\Sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=+\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}},\quad \text{同理}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

所以$I+\int_{\Gamma_1}=-\iint_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$，故$I=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.



END

02 格林公式(2)

03 曲线积分与路径无关的条件

04 斯托克斯公式

中国大学MOOC