全国大学生
数学竞赛
提高课程

01

第十章 曲线积分与曲面积分

中国大学MOOC



内容

01 第二类曲线积分

02 格林公式

中国大学MOOC

一、第二类曲线积分

定义

设L为xOy面内从点A到点B的一条有向光滑曲线弧，函数$P(x,y)$，$Q(x,y)$在L上有界．用L上的点$M_1(x_1,y_1),M_2(x_2,y_2),\cdots,M_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})$把$L$分成$n$个有向小弧段$M_{i-1}M_i$ $(i=1,2,\cdots,n;\ M_0=A,\ M_n=B)$．设$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$，点$(\xi_i,\eta_i)$为$M_{i-1}M_i$上任意取定的点．如果当各小弧段长度的最大值$\lambda\to 0$时，若极限$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$存在，则称此极限为函数$P(x,y)$，$Q(x,y)$在有向曲线弧$L$上对坐标的曲线积分(或称第二类曲线积分)，记作

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i].$$

一、第二类曲线积分

推广　空间有向曲线弧Γ，

$$\int_{\Gamma} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i]$$

即

$$\int_{\Gamma} P(x,y,z)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i,$$

$$\int_{\Gamma} Q(x,y,z)\mathrm{d}y = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i,$$

$$\int_{\Gamma} R(x,y,z)\mathrm{d}z = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i.$$



一、第二类曲线积分

性质

性质1 设L是有向曲线弧，$-L$是与L方向相反的有向曲线弧，则

$$\int_{-L} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = -\int_{L} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

对坐标的曲线积分与曲线的方向有关

性质2 设α、β为任意常数，则

$$\int_{L} [\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}]\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \alpha \int_{L} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \beta \int_{L} \vec{G}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$



性质3 如果把L分成L_1和L_2，则

$$\int_{L} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

一、第二类曲线积分

计算公式

设$P(x,y),Q(x,y)$在曲线弧L上有定义且连续，L的参数方程为$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，

当参数t单调地由α变到β时，点$M(x,y)$从L的起点A沿L运动到终点B，$\varphi(t)$，$\psi(t)$在以α及β为端点的闭区间上具有一阶连续导数，且$\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，则曲线积分$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$存在，且

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

二、对坐标曲线积分的计算法

计算步骤

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$



一代　将L的参数方程代入被积函数

二换　$\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t, \mathrm{d}y = \psi'(t)\mathrm{d}t$

三定限　下限－起点参数值，上限-终点参数值

一、第二类曲线积分

例1　设 $I_a(r)=\int_C \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^a}$，其中 a 为常数，曲线 C 为椭圆 $x^2+xy+y^2=r^2$，取正向，求极限 $\lim\limits_{r\to+\infty} I_a(r)$.

解　作变换 $\begin{cases} x=\dfrac{u-v}{\sqrt{2}} \\ y=\dfrac{u+v}{\sqrt{2}} \end{cases}$，

曲线 C 变为 uOv 平面上的曲线 $\Gamma:\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}v^2=r^2$，也是取正向，

且有 $x^2+y^2=u^2+v^2$，$y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v$，

从而　$I_a(r)=\int_\Gamma \frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{(u^2+v^2)^a}$.

一、第二类曲线积分

设 $I_a(r)=\int_C \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^a}$，其中 a 为常数，曲线 C 为椭圆 $x^2+xy+y^2=r^2$，取正向，求极限 $\lim\limits_{r\to+\infty} I_a(r)$.

作变换 $\begin{cases} u=\sqrt{\frac{2}{3}}\,r\cos\theta \\ v=\sqrt{2}\,r\sin\theta \end{cases}$，则有 $v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^2\mathrm{d}\theta$，

$\Gamma:\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}v^2=r^2$，正向，

$$I_a(r)=\int_\Gamma \frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{(u^2+v^2)^a}.$$

$$I_a(r)=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^{2(1-a)}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta)^a}=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^{2(1-a)}J_a,$$

其中 $J_a=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta)^a}$　$0<J_a<+\infty$.

因此当 $a>1$ 时，所求极限为 0；　当 $a<1$ 时，所求极限为 $-\infty$.

一、第二类曲线积分

设 $I_a(r)=\int_C \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^a}$，其中 a 为常数，曲线 C 为椭圆 $x^2+xy+y^2=r^2$，取正向，求极限 $\lim\limits_{r\to+\infty} I_a(r)$.

而当 $a=1$ 时，

$$J_1=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta}$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\tan\theta}{\frac{2}{3}+2\tan^2\theta}=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2+t^2}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}}\arctan\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{3}}\Big|_0^{+\infty}=\sqrt{3}\pi.$$

故所求极限为 $\lim\limits_{t\to+\infty} I_a(r)=\begin{cases}0, & a>1,\\ -\infty, & a<1,\\ -2\pi, & a=1.\end{cases}$

$$I_a(r)=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^{2(1-a)}J_a$$

$$\int\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

一、第二类曲线积分

例 2　计算 $I=\oint_{\Gamma}|\sqrt{3}y-x|\mathrm{d}x-5z\mathrm{d}z$，$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8\\x^2+y^2=2z\end{cases}$，从 z 轴正向往坐标原点看去取逆时针方向.

解　$\Gamma:\begin{cases}z=2\\x^2+y^2=4\end{cases}\Rightarrow\Gamma$ 的参数方程：$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=2\sin\theta\\z=2\end{cases},0\le\theta\le2\pi$

$$I=-\int_0^{2\pi}|2\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta|2\sin\theta\mathrm{d}\theta=-8\int_0^{2\pi}|\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta|\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=-8\int_0^{2\pi}|\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)|\sin\theta\mathrm{d}\theta=-8\int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi+\frac{\pi}{3}}|\cos t|\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}t\quad\text{令 }t=\theta+\frac{\pi}{3}$$

一、第二类曲线积分

计算 $I=\oint_{\Gamma}|\sqrt{3}y-x|\mathrm{d}x-5z\mathrm{d}z$，$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8\\ x^2+y^2=2z\end{cases}$，从$z$轴正向往坐标原点看去取逆时针方向.

根据周期函数的积分性质得

$$I=-8\int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi+\frac{\pi}{3}}|\cos t|\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}t$$

$$I=-8\int_{-\pi}^{\pi}|\cos t|\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}t=-4\int_{-\pi}^{\pi}|\cos t|\left(\sin t-\sqrt{3}\cos t\right)\mathrm{d}t$$

$$=-4\int_{-\pi}^{\pi}|\cos t|\sin t\mathrm{d}t+4\int_{-\pi}^{\pi}|\cos t|\cdot\sqrt{3}\cos t\mathrm{d}t$$

$$=0+8\sqrt{3}\int_{0}^{\pi}|\cos t|\cos t\mathrm{d}t$$

令 $u=t-\frac{\pi}{2}$

$$=-8\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin u|\sin u\mathrm{d}t=0.$$

二、格林公式

格林公式

设平面有界闭区域D由分段光滑的曲线L围成，函数$P(x,y),Q(x,y)$在D上有一阶连续偏导数，则有$\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$

其中L是D的取正向的整个边界曲线.

注 (1)曲线L为封闭曲线；

(2)曲线L的方向为正向；

(3)函数$P(x,y),Q(x,y)$在D上有一阶连续偏导数.

二、格林公式

例1　设曲线积分 $I=\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{|x|+|y|}$，其中 L 是以 $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ 为顶点的正方形的边界曲线，方向为逆时针，则 $I=$ _____.

解　曲线 L 的方程为 $|x|+|y|=1$，　$I=\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{|x|+|y|}=\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$

记该曲线所围区域为正方形 D，其边长为 $\sqrt{2}$，面积为 2.

由格林公式，有

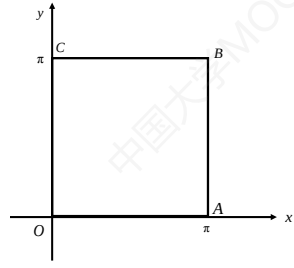
$$I=\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\iint_D (1+1)\mathrm{d}\sigma=2\sigma=4.$$

二、格林公式

例 2　已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le \pi, 0\le y\le \pi\}$, L 为 D 的正向边界，试证：

(1) $\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx = \oint_L xe^{-\sin y}dy - ye^{\sin x}dx$;

(2) $\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx \ge \frac{5}{2}\pi^2$.



(1) 证法 1　直接用对坐标曲线积分的计算法计算.

左端 $= \oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx = \int_{\overset{\frown}{OA}} + \int_{\overset{\frown}{AB}} + \int_{\overset{\frown}{BC}} + \int_{\overset{\frown}{CO}}$

$= 0 + \int_0^{\pi} \pi e^{\sin y}dy + \int_{\pi}^{0} (-\pi e^{-\sin x})dx + 0 = \pi\int_0^{\pi} (e^{\sin x} + e^{-\sin x})dx,$

右端 $= \int_0^{\pi} \pi e^{-\sin y}dy + \int_{\pi}^{0} (-\pi e^{\sin x})dx = \pi\int_0^{\pi} (e^{\sin x} + e^{-\sin x})dx.$　得证

二、格林公式

(1) $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x = \oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x;$

(1) 证法2　根据格林公式，将曲线积分化为区域D上的二重积分

$$\text{左端} = \oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x = \iint_D (\mathrm{e}^{\sin y} + \mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}\sigma,$$

$$\text{右端} = \oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x = \iint_D (\mathrm{e}^{-\sin y} + \mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}\sigma,$$

因为D关于$y = x$对称，所以 $\iint_D (\mathrm{e}^{\sin y} + \mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}\sigma = \iint_D (\mathrm{e}^{-\sin y} + \mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}\sigma,$

故　$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x = \oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x.$

二、格林公式

(2)试证：$\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx \geq \frac{5}{2}\pi^2$.

$$\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x})d\sigma,$$

$$(2)\ e^t + e^{-t} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!} \geq 2 + t^2$$

$$\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x})d\sigma = \iint_D (e^{\sin x} + e^{-\sin x})d\sigma$$

$$\geq \iint_D (2 + \sin^2 x)d\sigma = 2\iint_D d\sigma + \iint_D \sin^2 x d\sigma = 2\pi^2 + \int_0^{\pi} dy \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$$

$$= 2\pi^2 + \int_0^{\pi} dy \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = 2\pi^2 + \frac{1}{2}\pi^2 = \frac{5}{2}\pi^2.$$



END

01 第二类曲线积分

02 格林公式

中国大学MOOC