全国大学生
数学竞赛
提高课程



第一章 函数、极限、连续

中国大学MOOC



内容

08 利用数列极限定义求极限

09 有关函数连续性

中国大学MOOC

一、利用数列极限定义求极限

1.数列极限的描述性定义

对于数列$\{x_n\}$，当n无限增大$(n \to \infty)$时，若x_n无限趋近于一个确定的常数a，则称a为n趋于无穷大时数列$\{x_n\}$的极限(或称数列收敛于a)，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \to a\,(n \to \infty).$$

八、利用数列极限定义求极限

2.数列极限的$\varepsilon - N$定义

设$\{x_n\}$为一数列，a是常数，如果对$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N \in N^+$，使对于满足$n > N$的一切x_n，总有$|x_n - a| < \varepsilon$成立，则称a为数列$\{x_n\}$的极限(或称数列收敛于a)，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \to a(n \to \infty).$$

一、利用数列极限定义求极限

注

(1)理解数列极限的关键在于弄清什么是无限增大、什么是无限趋近.

(2)并不是所有的无穷数列都有极限，例如，数列$\{(-1)^n\}$的极限不存在.

(3)研究一个数列的极限，关注的是数列后面无限项的问题，改变该数列前面任何有限多个项，都不能改变这个数列的极限.

(4)“无限趋近于a”是指数列$\{x_n\}$后面的任意项与a的距离无限接近零.

3.重要结论

结论1　如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$

Stolz定理

结论2　设数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 满足：

(1) $\{b_n\}$ 严格单调递增；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$，　　$\dfrac{*}{\infty}$型

则　$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$

八、利用数列极限定义求极限

例　设$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$为数列，a，λ为有限数，求证：

2011预赛

2017预赛

(1) 如果$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$.

(2) 如果存在正整数p，使得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p} - a_n\right) = \lambda$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = \dfrac{\lambda}{p}$.

分析　$\left|\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| = \left|\dfrac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n}\right|$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbf{N}_+$，当$n > N_1$时，$|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

$$\leq \left|\frac{(a_1 - a) + \cdots + (a_{N_1} - a)}{n}\right| + \left|\frac{(a_{N_1+1} - a) + \cdots + (a_n - a)}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

八、利用数列极限定义求极限

求证：（1）如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$

证 (1) 根据定义 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_1 \in \mathbf{N}$，当 $n > N_1$ 时，$|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}.$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\exists M > 0$，使得 $|a_n| \le M$，

从而 $\left|\dfrac{(a_1 - a) + \cdots + (a_{N_1} - a)}{n}\right| = \dfrac{|a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1} - N_1 a|}{n}$

$\le \dfrac{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{N_1}| + N_1|a|}{n} \le \dfrac{N_1(M + |a|)}{n}$

$\dfrac{N_1(M + |a|)}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow n > \dfrac{2N_1(M + |a|)}{\varepsilon}$

取 $N_2 = \left[\dfrac{2N_1(M + |a|)}{\varepsilon}\right] + 1$，则 $\exists N_2 \in \mathbf{N}$，当 $n > N_2$ 时，$\dfrac{N_1(M + |a|)}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}.$

八、利用数列极限定义求极限

求证：（1）如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_1 \in \mathbf{N}$，当 $n > N_1$ 时，$|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$；

$\exists N_2 \in \mathbf{N}$，当 $n > N_2$ 时，$\left|\dfrac{(a_1 - a) + \cdots + (a_{N_1} - a)}{n}\right| < \dfrac{N_1(M + |a|)}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}.$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时，有

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| \le \left|\frac{(a_1 - a) + \cdots + (a_{N_1} - a)}{n}\right| + \left|\frac{(a_{N_1+1} - a) + + \cdots + (a_n - a)}{n}\right|$$

$$\le \frac{N_1(M + |a|)}{n} + \frac{n - N_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$

八、利用数列极限定义求极限

求证：（1）如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$

（2）如果存在正整数 p，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_{n+p} - a_n\right) = \lambda$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = \dfrac{\lambda}{p}.$

（2）对于 $i = 0, 1, \cdots, p-1$，令 $A_n^{(i)} = a_{(n+1)p+i} - a_{np+i}$，易知 $\left\{A_n^{(i)}\right\}$ 为 $\left\{a_{n+p} - a_n\right\}$ 的子列.

由 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_{n+p} - a_n\right) = \lambda$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^{(i)} = \lambda$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_1^{(i)} + A_2^{(i)} + \cdots + A_n^{(i)}}{n} = \lambda,$

$$A_1^{(i)} + A_2^{(i)} + \cdots + A_n^{(i)}$$
$$= \left[a_{2p+i} - a_{p+i}\right] + \left[a_{3p+i} - a_{2p+i}\right] + \left[a_{4p+i} - a_{3p+i}\right] + \cdots$$
$$+ \left[a_{np+i} - a_{(n-1)p+i}\right] + \left[a_{(n+1)p+i} - a_{np+i}\right] = a_{(n+1)p+i} - a_{p+i},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{(n+1)p+i} - a_{p+i}}{n} = \lambda.$

八、利用数列极限定义求极限

求证：(1) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$.

(2) 如果存在正整数 p，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(a_{n+p} - a_n\right) = \lambda$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = \dfrac{\lambda}{p}$.

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{(n+1)p+i} - a_{p+i}}{n} = \lambda$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{p+i}}{(n+1)p+i} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{(n+1)p+i} - a_{p+i}}{(n+1)p+i} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{(n+1)p+i} - a_{p+i}}{n} \cdot \frac{n}{(n+1)p+i} = \frac{\lambda}{p}$$

取正整数 $m = (n+1)p + i$，则 $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{a_m}{m} = \dfrac{\lambda}{p}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = \dfrac{\lambda}{p}$.

九、有关函数连续性

连续定义

设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域内有定义，如果当自变量x有增量Δx时，函数有相应的增量Δy，若$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称函数$y=f(x)$在点$x_0$处连续，称$x_0$为$f(x)$的连续点.

设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域内有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数$y=f(x)$在点$x_0$处连续.

九、有关函数连续性

连续定义

设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域内有定义，如果对于任意正数ε，总存在正数δ，使当x满足不等式$|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

成立，则称函数$y=f(x)$在点x_0处连续.

九、有关函数连续性

从定义可以看出，函数$y=f(x)$在点x_0处连续必须满足三个条件：

01 $y=f(x)$在点x_0处有定义；

02 $y=f(x)$在点x_0处极限存在，即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$（常数）；

03 $y=f(x)$在点x_0处的极限值等于函数值，即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

定理 函数$f(x)$在点x_0处连续的充分必要条件是

函数$f(x)$在点x_0处既左连续又右连续.

中国大学MOOC

九、有关函数连续性

例 1　设函数 $y=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-a\sin^2 x}-b}{x^2}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，则 $a+b$ 的值为 _____.

解　设 $y=f(x)$，由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续得 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-a\sin^2 x}-b}{x^2}=2$

故有 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1-a\sin^2 x}-b\right)=0$，从而 $b=1$.

$x\to 0$ 时，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-a\sin^2 x}-b}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-a\sin^2 x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-a\sin^2 x}{2x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-ax^2}{2x^2}=-\frac{a}{2}=2$$

故有 $a=-4$，因此 $a+b=-3$.

九、有关函数连续性

闭区间上连续函数的性质

定理1 (最大值与最小值定理)

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一定有最大值与最小值.

定理2 (介值定理)

如果 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，m 和 M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值与最大值，则对介于 m 与 M 之间的任一实数 c (即 $m < c < M$)，至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = c$.

中国大学MOOC

九、有关函数连续性

推论 (零点定理)

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.



九、有关函数连续性

例 2　设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内连续，且存在两两互异的 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \in (0,1)$，使得 $\alpha = \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < \dfrac{f(x_3)-f(x_4)}{x_3-x_4} = \beta$，证明：对任意 $\lambda \in (\alpha,\ \beta)$，存在互异的点 $x_5,\ x_6 \in (0,1)$，使得 $\lambda = \dfrac{f(x_5)-f(x_6)}{x_5-x_6}$.

$\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$

证　不妨设 $x_1 < x_2,\ x_3 < x_4$，

构造辅助函数 $F(t) = \dfrac{f[(1-t)x_2 + tx_4] - f[(1-t)x_1 + tx_3]}{(1-t)(x_2-x_1) + t(x_4-x_3)}$，

$F(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $F(0) = \alpha < \lambda < \beta = F(1)$，

根据介值定理，存在 $t_0 \in (0,1)$，使得 $F(t_0) = \lambda$.

九、有关函数连续性

证明：对任意 $\lambda \in (\alpha, \beta)$，存在互异的点 x_5，$x_6 \in (0,1)$，使得 $\lambda = \dfrac{f(x_5) - f(x_6)}{x_5 - x_6}$.

$$F(t) = \frac{f[(1-t)x_2 + tx_4] - f[(1-t)x_1 + tx_3]}{(1-t)(x_2 - x_1) + t(x_4 - x_3)}$$

存在 $t_0 \in (0,1)$，使得 $F(t_0) = \lambda$.

即存在 $t_0 \in (0,1)$，$\lambda = \dfrac{f[(1-t_0)x_2 + t_0 x_4] - f[(1-t_0)x_1 + t_0 x_3]}{(1-t_0)(x_2 - x_1) + t_0(x_4 - x_3)}$，

令 $x_5 = (1-t_0)x_2 + t_0 x_4$，$x_6 = (1-t_0)x_1 + t_0 x_3$

则 x_5，$x_6 \in (0,1)$，$x_5 < x_6$，使得 $\lambda = F(t_0) = \dfrac{f(x_5) - f(x_6)}{x_5 - x_6}$.

介值定理是闭区间上连续函数的一个重要结论，我们常常会感受到介值定理在高等数学的证明题中存在。在接下来的学习讨论过程中同学们要注意关注，介值定理与罗尔定理、介值定理与泰勒中值定理结合应用，出现在综合性的证明题中 。

END

08 利用数列极限定义求极限

09 有关函数连续性