全国大学生
数学竞赛
提高课程

02

# 第一章 函数、极限、连续

中国大学MOOC



# 内容


04 利用洛必达法则求极限

05 利用泰勒公式求极限

06 利用导数定义求极限

07 利用定积分定义求极限


中国大学MOOC

# 四、利用洛必达法则求极限

## 1.洛必达法则I

洛必达法则I　设$f(x)$、$g(x)$在$x_0$的某去心邻域内有定义，若

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$;

(2) $f(x)$、$g(x)$在$x_0$的某去心邻域内可导，且$g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或无穷大)，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

# 四、利用洛必达法则求极限

## 2.洛必达法则II

洛必达法则II　设$f(x)$、$g(x)$在$x_0$的某去心邻域内有定义，若

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$;

(2) $f(x)$、$g(x)$在$x_0$的某去心邻域内可导，且$g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或无穷大)，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

# 四、利用洛必达法则求极限

(1)洛必达法则仅适用于“$\frac{0}{0}$”和“$\frac{\infty}{\infty}$”；

(2)若条件具备，洛必达法则可以连续多次使用，即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)};$$

(3)洛必达法则和其它方法结合使用，简便为原则；

(4)洛必达法则条件是充分而非必要，可能失效.



注：

例如 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{1+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$极限不存在

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$(循环)

## 四、利用洛必达法则求极限

$1^{\infty}$

例1　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x}+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$，其中 $n$ 是给定的正整数.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\exp\left[\dfrac{e}{x}\ln\left(\dfrac{e^{x}+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)\right]$　　$\exp u=e^{u}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{e\left[\ln\left(e^{x}+e^{2x}+\cdots+e^{nx}\right)-\ln n\right]}{x}\right\},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e\left[\ln\left(e^{x}+e^{2x}+\cdots+e^{nx}\right)-\ln n\right]}{x}=e\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{e^{x}+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}$$

$$=\frac{e\left(1+2+\cdots+n\right)}{n}=\frac{e}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}e,\quad \text{于是原式}=e^{\frac{n+1}{2}e}.$$

## 四、利用洛必达法则求极限

例 2　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$.　$\dfrac{0}{0}$

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x + x\cos x)(\sin x - x\cos x)}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x\cos x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$$

$$= \left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} + \lim_{x\to 0}\cos x\right]\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3x^2} = 2\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

# 五、利用泰勒公式求极限

## 1.泰勒公式

设函数$f(x)$在含有$x_0$的某个开区间$(a,b)$内具有直到$(n+1)$阶导数，

则对任意$x \in (a,b)$ 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

其中 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，　$\xi$介于$x$与$x_0$之间.

拉格朗日型余项

$$R_n(x) = o[(x-x_0)^n].$$

皮亚诺型余项

# 五、利用泰勒公式求极限

## 2.麦克劳林公式

设函数 $f(x)$ 在含有 $x=0$ 的某个开区间 $(a,b)$ 内具有直到 $(n+1)$ 阶导数，

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

拉格朗日型余项

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

皮亚诺型余项

# 五、利用泰勒公式求极限

## 3.常用麦克劳林公式

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\cdots+\frac{x^{n}}{n!}+o(x^{n}),$$

$$\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}+\cdots+(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\cdots+(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1}),$$

# 五、利用泰勒公式求极限

## 3.常用麦克劳林公式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1}),$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n),$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{m!}x^n+o(x^n)$$

## 五、利用泰勒公式求极限

例　设$f(x)$在区间$(-1,1)$内三阶连续可导，满足$f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=0$，$f'''(0)=-1$；又设数列$\{a_n\}$满足$a_1\in(0,1)$，$a_{n+1}=f(a_n),(n=1,2,\cdots\cdots)$，严格单调减少，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，计算$\lim\limits_{n\to\infty}na_n^2$.

分析　$$\lim_{n\to\infty}na_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2a_{n+1}^2}{a_n^2-a_{n+1}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2f^2(a_n)}{a_n^2-f^2(a_n)}$$

Stolz定理$(\overset{*}{\frac{\infty}{\infty}})$　设数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$满足：(1)$\{b_n\}$严格单调递增；(2)$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$

## 五、利用泰勒公式求极限

设$f(x)$在区间$(-1,1)$内三阶连续可导，满足$f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=0$，$f'''(0)=-1$；又设数列$\{a_n\}$满足$a_1\in(0,1)$，$a_{n+1}=f(a_n)$，$(n=1,2,\cdots\cdots)$，严格单调减少，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，计算$\lim\limits_{n\to\infty}na_n^2$.

解　$f(x)$在$x=0$处展为泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3)$$

$$=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$$

由于$a_1\in(0,1)$，数列$\{a_n\}$严格单调减少且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则$a_n>0$，

且$\left\{\dfrac{1}{a_n^2}\right\}$为严格单调增加趋于正无穷的数列，

$$\lim_{n\to\infty}na_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\dfrac{1}{a_n^2}}$$

## 五、利用泰勒公式求极限

计算 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n^2$　　$f(x)=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$

$$\lim_{n\to\infty} na_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2a_{n+1}^2}{a_n^2-a_{n+1}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2f^2(a_n)}{a_n^2-f^2(a_n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2\left[a_n-\frac{1}{6}a_n^3+o(a_n^3)\right]^2}{a_n^2-\left[a_n-\frac{1}{6}a_n^3+o(a_n^3)\right]^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^4\left[-\frac{1}{3}a_n^6+\frac{1}{36}a_n^8+o(a_n^8)\right]}{\frac{1}{3}a_n^4\left[-\frac{1}{36}a_n^6+o(a_n^6)\right]}=3.$$

Stolz定理　(1) $\{b_n\}$ 严格单调递增；(2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$

# 六、利用导数定义求极限

## 1.导数定义

设函数$y=f(x)$在点$x_0$的某邻域内有定义，当自变量$x$在$x_0$处有增量$\Delta x$时，相应函数的增量为$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 如果当$\Delta x\to 0$时，极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$存在，则称函数$y=f(x)$在点$x_0$处可导，并把这个极限值称为函数$y=f(x)$在点$x_0$处的导数，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

中国大学MOOC

# 六、利用导数定义求极限

## 2.导数定义其他形式

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

导函数 $$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

## 六、利用导数定义求极限

例　若 $f(1)=0$，$f'(1)$ 存在，求极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan 3x}{(e^{x^2}-1)\sin x}$.

解　$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)\cdot 3x}{x^2\cdot x}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2}$

$\Delta x$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{f[1+(\sin^2 x+\cos x-1)]-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}$$

$\Delta x$

$$=3\cdot f'(1)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$t\to 0$ 时，$\tan t\sim t$

$t\to 0$ 时，$e^t-1\sim t$

$t\to 0$ 时，$\sin t\sim t$

## 六、利用导数定义求极限

若 $f(1)=0$，$f'(1)$ 存在，求极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan 3x}{(e^{x^2}-1)\sin x}$.

$$I=3\cdot f'(1)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}$$

$$=3f'(1)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}\right)$$

$$=3f'(1)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}f'(1).$$

$x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$

$x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$

# 七、利用定积分定义求极限

## 定积分定义

设函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上有界，在$[a,b]$内任意插入$n-1$个分点$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$,将区间$[a,b]$分成$n$个小区间$[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$，每个小区间的长度记为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$，在每个小区间上任取一点$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，作乘积$f(\xi_i)\Delta x_i$,再求和$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，记$\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$，当$\lambda\to 0$时如果上述和式的极限$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$存在，则称函数$f(x)$在区间$[a,b]$上可积，此极限值为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分，记作$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 即$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$.

# 七、利用定积分定义求极限

## 定积分定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

取 $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$，$\xi_i = a + \dfrac{b-a}{n}i$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}i\right)$$

## 七、利用定积分定义求极限

例 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n^2+2}+\dfrac{\sin\frac{3\pi}{n}}{n^2+3}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right)=$ _____.

解 $x_n \geq n\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+n}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n^2+n}+\dfrac{\sin\frac{3\pi}{n}}{n^2+n}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right)$ 缩小

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{3\pi}{n}}{n+1}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}$$

$$x_n \leq n\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n^2}+\frac{\sin\frac{3\pi}{n}}{n^2}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n^2}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}$$ 放大

# 七、利用定积分定义求极限

即 $\dfrac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}\le\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}\le\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}$，

$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n^2+2}+\dfrac{\sin\frac{3\pi}{n}}{n^2+3}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

由夹逼准则，可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}=\dfrac{2}{\pi}$.



END

04 利用洛必达法则求极限

05 利用泰勒公式求极限

06 利用导数定义求极限

07 利用定积分定义求极限

中国大学MOOC