全国大学生
数学竞赛



第9届决赛

中国大学MOOC

一、填空题

(满分30分，每小题6分)

第1题



中国大学MOOC

(2018决赛，6分) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\ln(1+\sin^2 x)}=$ _____.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\ln(1+\sin^2 x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$$

故应填 $\dfrac{1}{2}$

一、填空题

(满分30分，每小题6分)

第2题



中国大学MOOC

(2018决赛，6分) 设一平面过原点和点$(6,-3,2)$，且与平面$4x-y+2z=8$垂直，则此平面方程为_____.

解　记所求平面法向向量为$\vec{n}$，$O(0,0,0)$，$A(6,-3,2)$，

$\overrightarrow{n_1}=\{4,-1,2\}$

故应填 $2x+2y-3z=0$

则$\overrightarrow{OA}=\{6,-3,2\}$，

$$\therefore \vec{n}=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{n_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & -3 & 2\\ 4 & -1 & 2\end{vmatrix}=-4\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k}$$

取法向向量$\{2,2,-3\}$，

所求平面为 $2(x-6)+2(y+3)-3(z-2)=0.$　即 $2x+2y-3z=0.$

一、填空题

(满分30分，每小题6分)

第3题



中国大学MOOC

(2018决赛，6分) 设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，满足 $\mathrm{d}f(x,y)=ye^{y}\mathrm{d}x+x(1+y)e^{y}\mathrm{d}y$ 及 $f(0,0)=0$，则 $f(x,y)=$_____.

解 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x(1+y)e^{y}$，

故应填 xye^{y}

积分得 $f(x,y)=\int x(1+y)e^{y}\mathrm{d}y=x\int(1+y)\mathrm{d}e^{y}$

$$=x\left[(1+y)e^{y}-e^{y}\right]+C(x)=xye^{y}+C(x)$$

$f(x,y)=xye^{y}+C(x)$ 两边关于 x 求导得 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=ye^{y}+C'(x)$

从而 $ye^{y}+C'(x)=ye^{y}\Rightarrow C'(x)=0\Rightarrow C(x)=C$ 所以 $f(x,y)=xye^{y}+C$

把 $f(0,0)=0$ 代入 $f(x,y)=xye^{y}+C$ 得 $C=0$ 故 $f(x,y)=xye^{y}$.

一、填空题

(满分30分，每小题6分)

第4题



中国大学MOOC

(2018决赛，6分) 满足 $\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=u(t)+\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t$ 及 $u(0)=1$ 的可微函数 $u(t)=$ _____.

故应填 $\dfrac{2\mathrm{e}^t-\mathrm{e}+1}{3-\mathrm{e}}$

解　记 $A=\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t$，则 $\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=u(t)+A,$

分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u+A}=\mathrm{d}t,$　积分得 $\ln(u+A)=t+\ln C$

整理得 $u=C\mathrm{e}^t-A,$ 把 $u(0)=1$ 代入得 $C=A+1.$　$\therefore\ u(t)=(A+1)\mathrm{e}^t-A$

上式两端积分 $\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t=(A+1)\int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t-A \quad\Rightarrow A=(A+1)(\mathrm{e}-1)-A$

解得 $A=\dfrac{\mathrm{e}-1}{3-\mathrm{e}}$　故 $u(t)=(\dfrac{\mathrm{e}-1}{3-\mathrm{e}}+1)\mathrm{e}^t-\dfrac{\mathrm{e}-1}{3-\mathrm{e}}=\dfrac{2\mathrm{e}^t-\mathrm{e}+1}{3-\mathrm{e}}.$

一、填空题

(满分30分，每小题6分)

第5题



中国大学MOOC

(2018决赛，6分) 设a，b，c，d是互不相同的正实数，x，y，z是实数，满足$a^x=bcd$，$b^y=cda$，$c^z=dab$，$d^w=abc$，则$\begin{vmatrix}-x & 1 & 1 & 1\\ 1 & -y & 1 & 1\\ 1 & 1 & -z & 1\\ 1 & 1 & 1 & -w\end{vmatrix}=$_____.

解　$a^xb^yc^zd^w=a^3b^3c^3d^3\Rightarrow a^{x-3}b^{y-3}c^{z-3}d^{w-3}=1$

所以 $x=y=z=w=3.$

$$D=\begin{vmatrix}-3 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -3\end{vmatrix}=0.$$

故应填0

二、（本题满分11分）



中国大学MOOC

(2018决赛，11分) 设函数$f(x)$在区间$(0,1)$内连续，且存在两两互异的x_1，x_2，x_3，$x_4 \in (0,1)$，使得$\alpha = \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < \dfrac{f(x_3)-f(x_4)}{x_3-x_4} = \beta$，证明：对任意$\lambda \in (\alpha, \beta)$，存在互异的点$x_5$，$x_6 \in (0,1)$，使得$\lambda = \dfrac{f(x_5)-f(x_6)}{x_5-x_6}$.

证　不妨设$x_1 < x_2$，$x_3 < x_4$，

构造辅助函数 $F(t) = \dfrac{f[(1-t)x_2 + tx_4] - f[(1-t)x_1 + tx_3]}{(1-t)(x_2-x_1) + t(x_4-x_3)}$，

$F(t)$在$[0,1]$上连续，且$F(0) = \alpha < \lambda < \beta = F(1)$，

根据介值定理，存在$t_0 \in (0,1)$，使得$F(t_0) = \lambda$.

设函数$f(x)$在区间$(0,1)$内连续，且存在两两互异的x_1，x_2，x_3，$x_4 \in (0,1)$，使得$\alpha = \dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < \dfrac{f(x_3)-f(x_4)}{x_3-x_4} = \beta$，证明：对任意$\lambda \in (\alpha, \beta)$，存在互异的点$x_5$，$x_6 \in (0,1)$，使得$\lambda = \dfrac{f(x_5)-f(x_6)}{x_5-x_6}$.

$$F(t) = \frac{f[(1-t)x_2 + tx_4] - f[(1-t)x_1 + tx_3]}{(1-t)(x_2-x_1) + t(x_4-x_3)}$$

存在$t_0 \in (0,1)$，使得$F(t_0) = \lambda$.

即存在$t_0 \in (0,1)$，$\lambda = \dfrac{f[(1-t_0)x_2 + t_0x_4] - f[(1-t_0)x_1 + t_0x_3]}{(1-t_0)(x_2-x_1) + t_0(x_4-x_3)}$，

令$x_5 = (1-t_0)x_2 + t_0x_4$，$x_6 = (1-t_0)x_1 + t_0x_3$

则x_5，$x_6 \in (0,1)$，$x_5 < x_6$，使得$\lambda = F(t_0) = \dfrac{f(x_5)-f(x_6)}{x_5-x_6}$.

三、（本题满分11分）



中国大学MOOC

(2018决赛，11分) 设函数$f(x)$在区间[0,1]上连续，且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \neq 0$，证明：在区间[0,1]上存在三个不同的点$x_1$，$x_2$，$x_3$，使得

$$\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{1+x_1^2}\int_0^{x_1} f(t)\mathrm{d}t + f(x_1)\arctan x_1\right]x_3$$

$$= \left[\frac{1}{1+x_2^2}\int_0^{x_2} f(t)\mathrm{d}t + f(x_2)\arctan x_2\right](1-x_3).$$

证　令$F(x) = \dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{\arctan x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t}$，则$F(0)=0$，$F(1)=1$.

且函数$F(x)$在闭区间[0,1]上可导，

根据介值定理，存在点$x_3 \in (0,1)$，使$F(x_3)=\dfrac{1}{2}$.

证明：$\dfrac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\left[\dfrac{1}{1+x_1^2}\int_0^{x_1} f(t)\mathrm{d}t+f(x_1)\arctan x_1\right]x_3$

$=\left[\dfrac{1}{1+x_2^2}\int_0^{x_2} f(t)\mathrm{d}t+f(x_2)\arctan x_2\right](1-x_3).$

$$F(x)=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\arctan x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t},$$

$$F(0)=0,\ \ F(1)=1,\ \ F(x_3)=\frac{1}{2}$$

$$F'(x)=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t}\cdot\left[\frac{1}{1+x^2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\arctan x\cdot f(x)\right],$$

在$[0,x_3]$上使用拉格朗日中值定理，存在$x_1\in(0,x_3)$,

使得$F(x_3)-F(0)=F'(x_1)(x_3-0)$

即$\dfrac{1}{2}-0=\dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t}\cdot\left[\dfrac{1}{1+x_1^2}\int_0^{x_1} f(t)\mathrm{d}t+f(x_1)\arctan x_1\right](x_3-0)$

也即$\dfrac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\left[\dfrac{1}{1+x_1^2}\int_0^{x_1} f(t)\mathrm{d}t+f(x_1)\arctan x_1\right]x_3;$

证明：$\dfrac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\left[\dfrac{1}{1+x_1^2}\int_0^{x_1} f(t)\mathrm{d}t+f(x_1)\arctan x_1\right]x_3$

$=\left[\dfrac{1}{1+x_2^2}\int_0^{x_2} f(t)\mathrm{d}t+f(x_2)\arctan x_2\right](1-x_3).$

$F(x)=\dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{\arctan x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t},$

$F(0)=0,\ F(1)=1,\ F(x_3)=\dfrac{1}{2}$

$F'(x)=\dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t}\cdot\left[\dfrac{1}{1+x^2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\arctan x\cdot f(x)\right],$

在$[x_3,1]$上使用拉格朗日中值定理，存在$x_2\in(x_3,1)$，

使得$F(1)-F(x_3)=F'(x_2)(1-x_3)$，

即$1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t}\cdot\left[\dfrac{1}{1+x_2^2}\int_0^{x_2} f(t)\mathrm{d}t+f(x_2)\arctan x_2\right](1-x_3),$

也即$\dfrac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\left[\dfrac{1}{1+x_2^2}\int_0^{x_2} f(t)\mathrm{d}t+f(x_2)\arctan x_2\right](1-x_3).$

四、（本题满分12分）



中国大学MOOC

(2018决赛，12分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}]$

解 $\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}=n\cdot\left[\dfrac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}-1\right]\cdot\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$,

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\frac{k}{n}}=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln x\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, $\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=x(\ln x-1)\,|_0^1=-1$

$\dfrac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}=\sqrt[(n+1)n]{\dfrac{[(n+1)!]^n}{(n!)^{n+1}}}=\sqrt[(n+1)n]{\dfrac{(n!)^n\cdot(n+1)^n}{(n!)^n\cdot n!}}=\sqrt[(n+1)n]{\dfrac{(n+1)^n}{n!}}$

$=\sqrt[(n+1)n]{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}$ $\ln\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=\ln\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{2}{n+1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n+1}{n+1}$

$=\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n+1}\ln\frac{k}{n+1}}$, $=\ln\dfrac{1}{n+1}+\ln\dfrac{2}{n+1}+\cdots+\ln\dfrac{n+1}{n+1}=\sum\limits_{i=1}^{n+1}\ln\dfrac{k}{n+1}$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}]$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

$$\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n+1}\ln\frac{k}{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}n\cdot\left[\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}-1\right]=\lim_{n\to\infty}n\cdot\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n+1}\ln\frac{k}{n+1}}-1\right]=\lim_{n\to\infty}n\cdot\left(-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\ln\frac{k}{n+1}\right)$$

$$=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\ln\frac{k}{n+1}=-\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x=1,$$

$x\to 0,\ \mathrm{e}^x-1\sim x$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}n\cdot\left[\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}-1\right]=\frac{1}{\mathrm{e}}\cdot 1=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

五、（本题满分12分）



中国大学MOOC

(2018决赛，12分)

设$X=(x_1,\ x_1,\cdots,\ x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$，定义$H(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$，$n\geq 2$.

(1) 证明：对任意非零$X\in\mathbf{R}^n$，$H(X)>0$；(2) 求$H(X)$满足条件$x_n=1$的最小值.

证 (1) $H(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$的矩阵 即$H(X)=X^TAX$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & -\frac{1}{2} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & -\frac{1}{2} \\ & & & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

A实对称，其任意k阶顺序主子式$\Delta_k>0$，所以A正定，故结论成立.

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & -\frac{1}{2} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & -\frac{1}{2} \\ & & & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

直接按第一行展开，有 $D_n=D_{n-1}-\frac{1}{4}D_{n-2}$

$$D_n-\frac{1}{2}D_{n-1}=\frac{1}{2}(D_{n-1}-\frac{1}{2}D_{n-2})=\frac{1}{2^2}(D_{n-2}-\frac{1}{2}D_{n-3})=\cdots$$

$$=\frac{1}{2^{n-2}}(D_2-\frac{1}{2}D_1)=\frac{1}{2^{n-2}}(\frac{3}{4}-\frac{1}{2})=\frac{1}{2^n}$$

$D_1=1,\ D_2=\frac{3}{4}$

$$D_n=\frac{1}{2}D_{n-1}+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}D_{n-2}+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^2}D_{n-2}+\frac{2}{2^n}=\cdots$$

$$=\frac{1}{2^{n-2}}D_2+\frac{n-2}{2^n}=\frac{1}{2^{n-2}}\cdot\frac{3}{4}+\frac{n-2}{2^n}=\frac{n+1}{2^n}$$

$\Delta_1=1>0,$

$\Delta_2=\frac{3}{4}>0,$

……

$\Delta_n=\frac{n+1}{2^n}>0.$

设$X=(x_1,x_1,\cdots x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$,定义$H(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1},\ n\geq 2.$

(1) 证明：对任意非零$X\in\mathbf{R}^n, H(X)>0$; (2) 求$H(X)$满足条件$x_n=1$的最小值.

(2) 对A作分块如下$A=\begin{bmatrix}A_{n-1} & \alpha\\ \alpha^T & 1\end{bmatrix}$, 其中$\alpha=(0,\cdots 0,-\frac{1}{2})^T\in\mathbf{R}^{n-1}$,

取可逆矩阵$P=\begin{bmatrix}I_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\alpha\\ \mathbf{0} & 1\end{bmatrix}$,

则$P^TAP=\begin{bmatrix}A_{n-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & 1-\alpha^TA_{n-1}^{-1}\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{n-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & a\end{bmatrix}$,

其中$a=1-\boldsymbol{\alpha}^T\mathbf{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}.$

$$A=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & -\frac{1}{2} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & -\frac{1}{2}\\ & & & -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$$

设$X=(x_1,x_1,\cdots x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$,定义$H(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$，$n\geq 2$.

(1) 证明：对任意非零$X\in\mathbf{R}^n$,$H(X)>0$；(2) 求$H(X)$满足条件$x_n=1$的最小值.

记$X=P\begin{bmatrix}X_0\\1\end{bmatrix}$，其中$X_0=(x_1,\ x_1,\cdots,\ x_{n-1})^T\in\mathbf{R}^{n-1}$，

$$P^{\mathrm{T}}AP=\begin{bmatrix}A_{n-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&a\end{bmatrix}$$

$$H(X)=X^TAX=(X_0^T,1)P^T\cdot(P^T)^{-1}\begin{bmatrix}A_{n-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&a\end{bmatrix}P^{-1}\cdot P\begin{bmatrix}X_0\\1\end{bmatrix}$$

$$=(X_0^T,1)\begin{bmatrix}A_{n-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_0\\1\end{bmatrix}=(X_0^TA_{n-1},a)\begin{bmatrix}X_0\\1\end{bmatrix}=X_0^TA_{n-1}X_0+a$$

且A_{n-1}正定，

所以$H(X)=X_0^TA_{n-1}X_0+a\geq a$，当$X=P\begin{bmatrix}X_0\\1\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$时，$H(X)=a$.

因此$H(X)$满足条件$x_n=1$的最小值为a.

六、（本题满分12分）



中国大学MOOC

(2018决赛，12分) 设函数$f(x,y)$在区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le a^2\}$上具有一阶连续偏导数，且满足$f(x,y)\big|_{x^2+y^2=a^2}=a^2$，以及$\max\limits_{(x,y)\in D}\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]=a^2$，其中$a>0$. 证明：$\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\le\dfrac{4}{3}\pi a^4$

解　格林公式$\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

取$P(x,y)=yf(x,y)$，$Q(x,y)=0$，得$\oint_C yf(x,y)\mathrm{d}x=\iint\limits_D\left[-f(x,y)-y\dfrac{\partial f}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

即$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\oint_C yf(x,y)\mathrm{d}x-\iint\limits_D y\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　①

满足 $f(x,y)\big|_{x^2+y^2=a^2}=a^2$, $\max\limits_{(x,y)\in D}\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]=a^2$，证明：$\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\le\dfrac{4}{3}\pi a^4$

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\oint_C yf(x,y)\mathrm{d}x-\iint\limits_D y\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad ①$$

取$P(x,y)=0$，$Q(x,y)=xf(x,y)$，得 $\oint_C xf(x,y)\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left[f(x,y)+x\dfrac{\partial f}{\partial x}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

即 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_C xf(x,y)\mathrm{d}y-\iint\limits_D x\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad ②$

①+②得 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}\oint_C f(x,y)[-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y]-\dfrac{1}{2}\iint\limits_D\left(x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{a^2}{2}\oint_C-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_1+I_2$$

满足 $f(x,y)\big|_{x^2+y^2=a^2}=a^2$, $\max\limits_{(x,y)\in D}\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]=a^2$，证明：$\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\le\dfrac{4}{3}\pi a^4$

$$I_1+I_2=\frac{a^2}{2}\oint_C -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

柯西不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\le\sum_{i=1}^{n}a_i^{\,2}\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^{\,2}$$

$$I_1=\frac{a^2}{2}\oint_C -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=a^2\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a^4$$

$$|I_2|=\left|\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\le\frac{1}{2}\iint\limits_D\left|x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\le\frac{1}{2}\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le\frac{a}{2}\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\pi a^4$$

故 $\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\le\pi a^4+\dfrac{1}{3}\pi a^4=\dfrac{4}{3}\pi a^4.$

中国大学MOOC

七、（本题满分12分）



中国大学MOOC

(2018决赛，12分)

设$0<a_n<1\,(n=1,2,\cdots)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=q$ (有限或$+\infty$).

(1) 证明：当$q>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；当$q<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散；

(2) 讨论$q=1$时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的收敛性并阐述理由.

证 (1) 若$q>1$，则$\exists p\in R$，满足$q>p>1$.

根据极限性质$\exists N\in Z^+$，满足$\forall n>N$，有$\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}>p$，即$a_n<\dfrac{1}{n^p}$，

而$p>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$收敛，根据正项级数比较审敛法级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；

设$0<a_n<1\,(n=1,2,\cdots)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln 1/a_n}{\ln n}=q$ (有限或$+\infty$).

(1) 证明：当$q>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；当$q<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散；

(2) 讨论$q=1$时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的收敛性并阐述理由.

若 $q<1$，则$\exists p\in R$，满足$q<p<1$，

根据极限性质$\exists N\in Z^+$，满足$\forall n>N$，有$\dfrac{\ln\dfrac{1}{a_n}}{\ln n}<p$，即$a_n>\dfrac{1}{n^p}$，

而$p<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$发散，　　根据正项级数比较审敛法级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散；

设$0<a_n<1\,(n=1,2,\cdots)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln 1/a_n}{\ln n}=q$ (有限或$+\infty$).

(1) 证明：当$q>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；当$q<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散；

(2) 讨论$q=1$时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的收敛性并阐述理由.

(2) 当$q=1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$可能收敛也可能发散.

例如，$a_n=\dfrac{1}{n}$满足条件，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散；

又如，$a_n=\dfrac{1}{n\ln^2 n}$满足条件，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$收敛.



END

中国大学MOOC