全国大学生
数学竞赛



第9届预赛

中国大学MOOC

一、填空题

(本题满分42分，共6小题，每小题7分

第1题



中国大学MOOC

(2017预赛,7分)

已知可导函数$f(x)$满足$\cos x f(x)+2\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t=x+1$，则$f(x)=$_____.

解　在方程两边求导得 $f'(x)\cos x+f(x)\sin x=1,\quad f(0)=1$

即 $f'(x)+f(x)\tan x=\sec x,$

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int \tan x\mathrm{d}x}\left(\int \sec x\mathrm{e}^{\int \tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{\ln\cos x}\left(\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{e}^{-\ln\cos x}\mathrm{d}x+C\right)=\cos x\left(\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\cos x(\tan x+C)=\sin x+C\cos x$$

由于$f(0)=1$，故$f(x)=\sin x+\cos x.$

故应填$\sin x+\cos x$

一、填空题

(本题满分42分，共6小题，每小题7分

第2题



中国大学MOOC

(2017预赛,7分)

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=$ _____.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left[n\pi+\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(-1)^n\sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)\right]^2=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\dfrac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=\sin^2\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)$

$=\sin^2\dfrac{\pi}{2}=1$ 故应填1

一、填空题

(本题满分42分，共6小题，每小题7分

第3题



中国大学MOOC

(2017预赛,7分)

设$w=f(u,v)$具有二阶连续偏导数，且$u=x-cy, v=x+cy$，

其中c为非零常数，则$w_{xx}-\frac{1}{c^2}w_{yy}=$_____.

故应填$4f_{12}$

解 $w_x=f_1+f_2$，$w_{xx}=(f_{11}+f_{12})+(f_{21}+f_{22})=f_{11}+2f_{12}+f_{22}$

$$w_y=f_1\cdot(-c)+f_2\cdot c=c(-f_1+f_2),$$

$$w_{yy}=c\cdot\frac{\partial}{\partial y}(-f_1+f_2)=c\left[-f_{11}\cdot(-c)-f_{12}\cdot c+f_{21}\cdot(-c)+f_{22}\cdot c\right]$$

$$=c\left(cf_{11}-cf_{12}-cf_{21}+cf_{22}\right)=c^2\left(f_{11}-2f_{12}+f_{22}\right)$$

故 $w_{xx}-\frac{1}{c^2}w_{yy}=f_{11}+2f_{12}+f_{22}-\frac{1}{c^2}\cdot c^2\left(f_{11}-2f_{12}+f_{22}\right)=4f_{12}.$

一、填空题

(本题满分42分，共6小题，每小题7分

第4题



中国大学MOOC

(2017预赛,7分) 设$f(x)$有二阶导数连续，且$f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)=6$，

则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}=$_____. 故应填 3

解 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2}f''(\xi)x^2$，$\xi$介于0与$x$之间

$=\dfrac{1}{2}f''(\xi)x^2$,

所以 $f(\sin^2 x)=\dfrac{1}{2}f''(\xi)\sin^4 x.$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(\xi)\sin^4 x}{2x^4}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}f''(\xi)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^4 x}{x^4}=3.$

一、填空题

(本题满分42分，共6小题，每小题7分

第5题



中国大学MOOC

(2017预赛,7分)

不定积分 $I=\int \frac{\mathrm{e}^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}\mathrm{d}x=$ _____.

故应填 $\frac{2\mathrm{e}^{-\sin x}}{1-\sin x}+C$

解 $I=2\int \frac{\mathrm{e}^{-\sin x}\sin x\cos x}{(1-\sin x)^2}\mathrm{d}x=2\int \frac{ve^{-v}}{(1-v)^2}\mathrm{d}v$ 令 $\sin x=v$

$$=2\int \frac{(v-1+1)\mathrm{e}^{-v}}{(v-1)^2}\mathrm{d}v=2\int \frac{\mathrm{e}^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v+2\int \frac{\mathrm{e}^{-v}}{(v-1)^2}\mathrm{d}v$$

$$=2\int \frac{\mathrm{e}^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v-2\int \mathrm{e}^{-v}\mathrm{d}\frac{1}{v-1}=2\int \frac{\mathrm{e}^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v-2\left(\mathrm{e}^{-v}\frac{1}{v-1}+\int \frac{\mathrm{e}^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v\right)$$

$$=2\int \frac{\mathrm{e}^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v-2\mathrm{e}^{-v}\frac{1}{v-1}+2\int \frac{\mathrm{e}^{-v}}{v-1}\mathrm{d}v=-\frac{2\mathrm{e}^{-v}}{v-1}+C=\frac{2\mathrm{e}^{-\sin x}}{1-\sin x}+C$$

一、填空题

(本题满分42分，共6小题，每小题7分

第6题



中国大学MOOC

(2017预赛,7分)

记曲面$z^2 = x^2 + y^2$和$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$围成空间区域为V,

则三重积分$\iiint_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$ _____.

解　使用球面坐标计算

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi/4} \mathrm{d}\varphi \int_0^2 \rho\cos\varphi \cdot \rho^2 \sin\varphi \mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\pi/4} \cdot \frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^2 = 2\pi$$

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

$$\mathrm{d}V = \rho^2\sin\varphi\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

故应填2π

二、（本题满分14分）



中国大学MOOC

(2017预赛，14分)

设二元函数$f(x,y)$在平面上有连续的二阶偏导数. 对任何角度α，定义一元函数$g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)$，若对任何$\alpha$都有$\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$且$\dfrac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$.

证明$f(0,0)$是$f(x,y)$的极小值.

解 $\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(t)}{\mathrm{d}t}=f_x'\cos\alpha+f_y'\sin\alpha=\left(f_x',\ f_y'\right)\cdot\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$

由于$\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=\left(f_x',\ f_y'\right)_{(0,0)}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=0$对一切$\alpha$成立，

故$(f_x',f_y')_{(0,0)}=(0,0)$，即$(0,0)$是$f(x,y)$的驻点.

$\dfrac{\mathrm{d}^2g_\alpha(t)}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f_x'\cos\alpha+f_y'\sin\alpha\right)$

设二元函数$f(x,y)$在平面上有连续的二阶偏导数. 对任何角度α，定义一元函数$g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)$，若对任何$\alpha$都有$\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$且$\dfrac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$.

证明$f(0,0)$是$f(x,y)$的极小值.

$$\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(t)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f_x'\cos\alpha+f_y'\sin\alpha\right)$$

$$=\left[f_{xx}''\cos\alpha+f_{xy}''\sin\alpha\right]\cos\alpha+\left[f_{yx}''\cos\alpha+f_{yy}''\sin\alpha\right]\sin\alpha$$

$$=f_{xx}''\cos^2\alpha+2f_{xy}''\sin\alpha\cos\alpha+f_{yy}''\sin^2\alpha$$

$$=(\cos\alpha,\sin\alpha)\begin{pmatrix}f_{xx}'' & f_{xy}''\\ f_{xy}'' & f_{yy}''\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix},\qquad \text{记}H_f(x,y)=\begin{pmatrix}f_{xx}'' & f_{xy}''\\ f_{xy}'' & f_{yy}''\end{pmatrix},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}=(\cos\alpha,\sin\alpha)H_f(0,0)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}>0$$

设二元函数$f(x,y)$在平面上有连续的二阶偏导数. 对任何角度α，定义一元函数$g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)$，若对任何$\alpha$都有$\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$且$\dfrac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}>0.$证明$f(0,0)$是$f(x,y)$的极小值.

$$\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}=(\cos\alpha,\sin\alpha)H_f(0,0)\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}>0$$

对任何单位向量$(\cos\alpha,\sin\alpha)$成立，故$H_f(0,0)$是一个正定阵，

$$\left|H_f(0,0)\right|=\begin{vmatrix}f_{xx}'' & f_{xy}''\\ f_{xy}'' & f_{yy}''\end{vmatrix}_{(0,0)}=AC-B^2>0,\qquad A=f_{xx}''(0,0)>0$$

故$f(0,0)$是$f(x,y)$的极小值.

三、（本题满分14分）

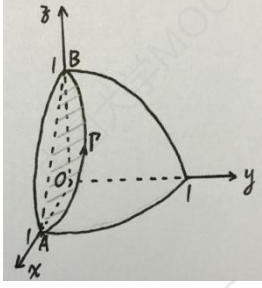


中国大学MOOC

(2017预赛，14分)

设曲线Γ为在$x^2+y^2+z^2=1$，$x+z=1$，$x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$

上从$A(1,0,0)$到$B(0,0,1)$的一段，求曲线积分$I=\int_{\Gamma} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z.$



分析　设Γ和Γ_1围成的平面区域Σ，方向按右手法则.

使用stokes公式计算 $\oint_{\Gamma+\Gamma_1} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix}$

解　记Γ_1为从B到A的直线段，$\overrightarrow{BA}=\{1,0,-1\}$,

Γ_1的对称式方程为$\frac{x-0}{1}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-1}{-1}=t,$　则$\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases}, t:0\to 1$

设曲线Γ为在$x^2+y^2+z^2=1,\ x+z=1,\ x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$

上从$A(1,0,0)$到$B(0,0,1)$的一段，求曲线积分$I=\int_{\Gamma} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z.$

直线Γ_1的参数方程为$\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=1-t \end{cases}, t:0\to 1$

$$\int_{\Gamma_1} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_0^1 t\mathrm{d}(1-t)=-\int_0^1 t\mathrm{d}t=-\frac{1}{2},$$

设Γ和Γ_1围成的平面区域Σ，方向按右手法则. 由stokes公式得

$$\oint_{\Gamma+\Gamma_1} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix}=-\iint_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

设曲线Γ为在$x^2+y^2+z^2=1,\ x+z=1,\ x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$
上从$A(1,0,0)$到$B(0,0,1)$的一段，求曲线积分$I=\int_{\Gamma} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z.$

由于Σ在xOz面上的投影为曲线，所以$\iint_{\Sigma}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$

$$I+\int_{\Gamma_1}=-\iint_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

计算 $\iint_{\Sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ x+z=1\end{cases}$ 消掉z：$x^2+y^2+(1-x)^2=1,$

$$\Rightarrow 2x^2-2x+y^2=0\ \Rightarrow 2(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$$

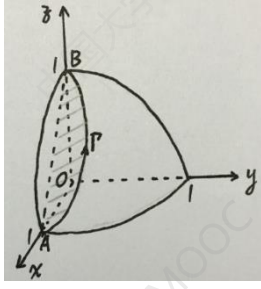
曲线Γ在xOy面上投影的方程为$\dfrac{(x-\frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2})^2}+\dfrac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}=1$

设曲线Γ为在$x^2+y^2+z^2=1,\ x+z=1,\ x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$
上从$A(1,0,0)$到$B(0,0,1)$的一段，求曲线积分$I=\int_{\Gamma} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z.$

$$\int_{\Gamma_1} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_0^1 t\mathrm{d}(1-t)=-\int_0^1 t\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}$$

$$I+\int_{\Gamma_1}=-\iint_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

曲线Γ在xOy面上投影的方程为$\dfrac{(x-\frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2})^2}+\dfrac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}=1$



$$\iint_{\Sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=+\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}},\quad \text{同理}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

$$\text{所以}\ I+\int_{\Gamma_1}=-\iint_{\Sigma}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{2\sqrt{2}},\quad \text{故}\ I=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

四、（本题满分15分）



中国大学MOOC

(2017预赛,15分)

设函数$f(x)>0$且在实轴上连续，若对任意实数t，有$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x)dx \le 1$,

证明：$\forall a,b(a<b)$，有$\int_a^b f(x)dx \le \frac{b-a+2}{2}$.

证　由于$\forall a,b(a<b)$，有 $\int_a^b e^{-|t-x|} f(x)dx \le \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x)dx \le 1$,

因此 $\int_a^b dt \int_a^b e^{-|t-x|} f(x)dx \le \int_a^b dt = b-a$

然而　$\int_a^b dt \int_a^b e^{-|t-x|} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b e^{-|t-x|}dt$

其中　$\int_a^b e^{-|t-x|}dt = \int_a^x e^{t-x}dt + \int_x^b e^{x-t}dt = e^{t-x}\Big|_a^x - e^{x-t}\Big|_x^b = 2 - e^{a-x} - e^{x-b}$

这样就有　$\int_a^b f(x)(2-e^{a-x}-e^{x-b})dx \le b-a$

设函数$f(x)>0$且在实轴上连续，若对任意实数t，有

$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t-x|} f(x)\mathrm{d}x \le 1$，证明：$\forall a,b(a<b)$，有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \dfrac{b-a+2}{2}$.

这样就有 $\int_a^b f(x)(2-\mathrm{e}^{a-x}-\mathrm{e}^{x-b})\mathrm{d}x \le b-a$

$\int_a^b \mathrm{e}^{-|t-x|} f(x)\mathrm{d}x \le 1$

即 $2\int_a^b f(x) - \int_a^b f(x)\cdot \mathrm{e}^{a-x}\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\cdot \mathrm{e}^{x-b}\mathrm{d}x \le b-a$

$\int_a^b \mathrm{e}^{a-x} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{e}^{-|a-x|} f(x)\mathrm{d}x \le 1$，　$\int_a^b \mathrm{e}^{x-b} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{e}^{-|b-x|} f(x)\mathrm{d}x \le 1$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \frac{b-a}{2} + \frac{1}{2}\left[\int_a^b \mathrm{e}^{a-x} f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b \mathrm{e}^{x-b} f(x)\mathrm{d}x\right]$$

$$\le \frac{b-a}{2} + 1 = \frac{b-a+2}{2}.$$

(2017预赛,15分)

设$\{a_n\}$为一个数列，p为固定的正整数. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right)=\lambda$，

其中λ为常数，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$.

(2011预赛,16分) 设$\left\{a_n\right\}_{n=0}^{\infty}$为数列，$a$，$\lambda$为有限数，求证：

(1) 如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

(2) 如果存在正整数p，使得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right)=\lambda$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$.

第三届，第二大题

五、（本题满分15分）



中国大学MOOC

(2017预赛,15分)

设$\{a_n\}$为一个数列，p为固定的正整数. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right)=\lambda$,

其中λ为常数，证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$.

证　对于$i=0,1,\ldots,p-1$，记$A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}$.

由题设$\lim\limits_{n\to\infty}A_n^{(i)}=\lambda$，从而　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}}{n}=\lambda$

$$
\begin{aligned}
&A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}\\
=&\left[a_{2p+i}-a_{p+i}\right]+\left[a_{3p+i}-a_{2p+i}\right]+\left[a_{4p+i}-a_{3p+i}\right]+\cdots\\
&+\left[a_{np+i}-a_{(n-1)p+i}\right]+\left[a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}\right]=a_{(n+1)p+i}-a_{p+i},
\end{aligned}
$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}}{n}=\lambda.$

设$\{a_n\}$为一个数列，p为固定的正整数. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right)=\lambda$，其中$\lambda$为常数，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$.

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}}{n}=\lambda.$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{p+i}}{(n+1)p+i}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}}{(n+1)p+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}}{n}\cdot\frac{n}{(n+1)p+i}=\frac{\lambda}{p}$$

取正整数$m=(n+1)p+i$，则$\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{a_m}{m}=\dfrac{\lambda}{p}$，

故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$.

END



中国大学MOOC