全国大学生
数学竞赛



第8届预赛

中国大学MOOC

一、填空题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

第1题



中国大学MOOC

(2016预赛,6分)

若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，且 $f(a)\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n=$ _____.

解法一 $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln y=\lim\limits_{n\to+\infty}n\left[\ln f(a+\dfrac{1}{n})-\ln f(a)\right]$ 令 $x=\dfrac{1}{n}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln f(a+x)-\ln f(a)}{x}=\left[\ln f(x)\right]'|_{x=a}=\frac{f'(x)}{f(x)}|_{x=a}=\frac{f'(a)}{f(a)}$$

故原式 $=\mathrm{e}^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$.

若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，且 $f(a)\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^{n}=$ _____.

解法二 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{f(a)+f'(a)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^{n}$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{f'(a)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^{\frac{f(a)}{f'(a)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}}\right]^{\frac{n\left(f'(a)\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{f(a)}}=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}.$

$\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$

$\lim\left[f(x)^{g(x)}\right]=\left[\lim f(x)\right]^{\lim g(x)}$

一、填空题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

第2题



中国大学MOOC

(2016预赛,6分)

若$f(1)=0$，$f'(1)$存在，求极限$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan 3x}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)\sin x}$.

解 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)\cdot 3x}{x^2\cdot x}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2}$

$=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f[1+(\sin^2 x+\cos x-1)]-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\dfrac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}$

$=3\cdot f'(1)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

若$f(1)=0$，$f'(1)$存在，求极限$I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan 3x}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)\sin x}$.

$$I=3\cdot f'(1)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}$$

$$=3f'(1)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}\right)$$

$$=3f'(1)(1-\frac{1}{2})=\frac{3}{2}f'(1).$$

$x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$

$x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$

一、填空题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

第3题



中国大学MOOC

(2016预赛, 6分) 若$f(x)$有连续导数，且$f(1)=2$，记$z=f(\mathrm{e}^x y^2)$，若$\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$，求$f(x)$在$x>0$的表达式.

解　由题设，得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(\mathrm{e}^x y^2)\cdot \mathrm{e}^x y^2 = f(\mathrm{e}^x y^2)$

令$u=\mathrm{e}^x y^2$, 当$u>0$时，有　$f'(u)u-f(u)=0$

则　$\dfrac{\mathrm{d}f(u)}{f(u)}=\dfrac{1}{u}\mathrm{d}u,$

积分得　$\ln f(u)=\ln u+C_1$，即　$f(u)=Cu$

又由初值条件得$f(u)=2u.$　　所以，当$x>0$时，$f(x)=2x.$

一、填空题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

第4题



中国大学MOOC

(2016预赛,6分) 设$f(x)=\mathrm{e}^{x}\sin 2x$，求$f^{(4)}(0)$.

解　将e^{x}和$\sin 2x$展开为带有佩亚诺余项的麦克劳林公式，有

$$f(x)=\left(1+x+\frac{1}{2!}x^{2}+\frac{1}{3!}x^{3}+o\left(x^{3}\right)\right)\cdot\left(2x-\frac{1}{3!}(2x)^{3}+o\left(x^{4}\right)\right)$$

$$=2x+2x^{2}+\left(1-\frac{2^{3}}{3!}\right)x^{3}+\left(\frac{2}{3!}-\frac{2^{3}}{3!}\right)x^{4}+o\left(x^{4}\right),$$

$$\mathrm{e}^{x}=1+x+\frac{1}{2!}x^{2}+\frac{1}{3!}x^{3}+\cdots+\frac{1}{n!}x^{n}+o\left(x^{n}\right),\ x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}+\cdots+(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right),\ x\in(-\infty,+\infty)$$

设$f(x)=\mathrm{e}^{x}\sin 2x$，求$f^{(4)}(0)$.

$$f(x)=2x+2x^{2}+\left(1-\frac{2^{3}}{3!}\right)x^{3}+\left(\frac{2}{3!}-\frac{2^{3}}{3!}\right)x^{4}+o\left(x^{4}\right),$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^{2}+\frac{f'''(0)}{3!}x^{3}+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^{4}+o\left(x^{4}\right)$$

所以有$\dfrac{f^{(4)}(0)}{4!}=\dfrac{2}{3!}-\dfrac{8}{3!}=-1,$　　即$f^{(4)}(0)=-24.$

一、填空题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

第5题



中国大学MOOC

2.(2016预赛) 求曲面$z=\frac{x^2}{2}+y^2$平行于平面$2x+2y-z=0$的切平面方程.

解　曲面在(x_0,y_0,z_0)的切平面的法向量为$\{x_0,2y_0,-1\}$，

又切平面与与已知平面平行，从而两平面的法向量平行，

所以　$\frac{x_0}{2}=\frac{2y_0}{2}=\frac{-1}{-1}.$　　从而$x_0=2,y_0=1$,得$z_0=3,$

所以切平面方程为　$2(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$

即　$2x+2y-z=3$

3.(2009预赛) 曲面$z=\frac{x^2}{2}+y^2-2$平行平面$2x+2y-z=0$的切平面方程_____.

答案　$2x+2y-z-5=0.$

二、（14分）



中国大学MOOC

(2016预赛, 14分)

设$f(x)$在$[0,1]$上可导，$f(0)=0$，且当$x\in(0,1)$时，$0<f'(x)<1$.

试证：当$a\in(0,1)$时，有 $\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2>\int_0^a f^3(x)\mathrm{d}x$.

证　设$F(x)=\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2-\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t$，则$F(0)=0$，即证$F(a)>F(0)$.

下证$F'(x)>0$.

$$F'(x)=2\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]\cdot f(x)-f^3(x)=f(x)\cdot\left[2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)\right]$$

再令 $g(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)$，$g(0)=0$　　$g'(x)=2f(x)\cdot[1-f'(x)]>0$

所以当$x>0$时，$g(x)$单调递增，从而$g(x)>g(0)=0$,

$F'(x)=f(x)\cdot g(x)>0$，得当$x>0$时，$F(x)$单调增加，即$F(a)>F(0)$，得证

三、（14分）



中国大学MOOC

(2016预赛, 14分) 某物体所在的空间区域为Ω：$x^2+y^2+2z^2\le x+y+2z$，密度函数为$x^2+y^2+z^2$，求质量$M=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解 Ω：$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2+2(z-\frac{1}{2})^2\le 1$ $\quad\quad$ $\dfrac{(x-\frac{1}{2})^2}{1^2}+\dfrac{(y-\frac{1}{2})^2}{1^2}+\dfrac{(z-\frac{1}{2})^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$

椭球体积$V=\dfrac{4}{3}\pi abc$, $\quad\quad$ Ω的体积为$V=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$,

做变换 $u=x-\dfrac{1}{2}$，$v=y-\dfrac{1}{2}$，$w=\sqrt{2}(z-\dfrac{1}{2})$,

将区域变成单位球 Ω'：$u^2+v^2+w^2\le 1$，而 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $M=\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\le 1}\left[(u+\frac{1}{2})^2+(v+\frac{1}{2})^2+(\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2})^2\right]\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$

(2016预赛, 14分) 某物体所在的空间区域为Ω：$x^2+y^2+2z^2\le x+y+2z$，密度函数为$x^2+y^2+z^2$，求质量$M=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

$$M=\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1}\left[(u+\frac{1}{2})^2+(v+\frac{1}{2})^2+(\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2})^2\right]\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1}(u^2+v^2+\frac{w^2}{2})\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w+\frac{\sqrt{2}}{2}\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1}(u+v+\frac{w}{\sqrt{2}})\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4})\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6})\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1}(u^2+v^2+w^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi,$$

(2016预赛, 14分) 某物体所在的空间区域为Ω：$x^2+y^2+2z^2\le x+y+2z$，密度函数为$x^2+y^2+z^2$，求质量$M=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6})\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1}(u^2+v^2+w^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi,$$

而 $$\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1}(u^2+v^2+w^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{4}{5}\pi,$$

所以 $M=\frac{5\sqrt{2}}{6}\pi.$

四、（14分）



中国大学MOOC

(2016预赛, 14分)

设 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[\,0\,,1\,]$上具有连续导数，$f(0)=0$，$f(1)=1$，

证明：$\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=-\frac{1}{2}.$

证　将区间$[0,1]$分成n等份，设分点为$x_k=\frac{k}{n}$($k=0,\,1,\,\cdots,n$)，$\Delta x_k=\frac{1}{n}.$

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_{x_0}^{x_1} f(x_1)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2} f(x_2)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x_n)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)\mathrm{d}x$$

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty} n\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)\mathrm{d}x\right]$$

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[\,0\,,1\,]$ 上具有连续导数，$f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=-\frac{1}{2}$.

$$=\lim_{n\to\infty} n\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(f(x)-f(x_k)\right)\mathrm{d}x\right]=\lim_{n\to\infty} n\left[\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{f(x)-f(x_k)}{x-x_k}\left(x-x_k\right)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\xi_k)-f(x_k)}{\xi_k-x_k}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(x-x_k\right)\mathrm{d}x\right]\qquad\left(\xi_k\in\left(x_{k-1}\,,x_k\right)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left[\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(x-x_k\right)\mathrm{d}x\right]\qquad\left(\eta_k\in\left(\xi_k\,,x_k\right)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left[\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)\left[-\frac{1}{2}\left(x_{k-1}-x_k\right)^2\right]\right]=-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)\Delta x_k\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\left[f(1)-f(0)\right]=-\frac{1}{2}.$$

五、（14分）



中国大学MOOC

(2016预赛, 14分) 设 函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，且$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\neq 0$.

证明：在$(0,1)$内存在不同的两点x_1，x_2，使得$\dfrac{1}{f(x_1)}+\dfrac{1}{f(x_2)}=\dfrac{2}{I}$.

分析 $\dfrac{I}{f(x_1)}+\dfrac{I}{f(x_2)}=2$，构造$F(x)=\dfrac{1}{I}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，

则$F'(x_1)=\dfrac{f(x_1)}{I}$，$F'(x_2)=\dfrac{f(x_2)}{I}$

证 设$F(x)=\dfrac{1}{I}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则$F(0)=0$，$F(1)=1$.

由介值定理，存在$\xi\in(0,1)$，使得$F(\xi)=\dfrac{1}{2}$.

对$F(x)$在区间$[0,\xi]$，$[\xi,1]$上分别应用拉格朗日中值定理

证明：在(0,1)内存在不同的两点 x_1 ， x_2 ， 使得 $\dfrac{1}{f(x_1)}+\dfrac{1}{f(x_2)}=\dfrac{2}{I}.$

设 $F(x)=\dfrac{1}{I}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ ， $F(0)=0$， $F(1)=1$， $F(\xi)=\dfrac{1}{2}$ $\xi\in(0,\ 1)$

$$F'(x_1)=\frac{f(x_1)}{I}=\frac{F(\xi)-F(0)}{\xi}=\frac{\frac{1}{2}}{\xi},\quad x_1\in(0\ ,\xi);$$

$$F'(x_2)=\frac{f(x_2)}{I}=\frac{F(1)-F(\xi)}{1-\xi}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\xi},\quad x_2\in(\xi\ ,1).$$

所以 $\dfrac{I}{f(x_1)}+\dfrac{I}{f(x_2)}=\dfrac{\xi}{\frac{1}{2}}+\dfrac{1-\xi}{\frac{1}{2}}=2,$ 即 $\dfrac{1}{f(x_1)}+\dfrac{1}{f(x_2)}=\dfrac{2}{I}.$

六、（14分）



中国大学MOOC

(2016预赛, 14分)

设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导，且 $f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$.

用傅里叶级数理论证明$f(x)$为常数.

证　由 $f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$可知$f$ 是以 $2,\sqrt{3}$为周期的周期函数，

傅里叶系数为 $a_n=\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x$，$b_n=\int_{-1}^{1} f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x$.

$a_n=\int_{-1}^{1} f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1} f(x+\sqrt{3})\cos n\pi x\mathrm{d}x$　　由于$f(x)=f(x+\sqrt{3})$,

$$=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)\cos n\pi(t-\sqrt{3})\mathrm{d}t=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)(\cos n\pi t\cos\sqrt{3}n\pi+\sin n\pi t\sin\sqrt{3}n\pi)\mathrm{d}t$$

$$=\cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)\cos n\pi t\mathrm{d}t+\sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t)\sin n\pi t\mathrm{d}t$$

$$=a_n\cos\sqrt{3}n\pi+b_n\sin\sqrt{3}n\pi;$$

设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导，且 $f(x)=f(x+2)=f(x+\sqrt{3})$.
用傅里叶级数理论证明$f(x)$为常数.

$a_n = a_n\cos\sqrt{3}n\pi + b_n\sin\sqrt{3}n\pi$　　同理可得 $b_n = b_n\cos\sqrt{3}n\pi - a_n\sin\sqrt{3}n\pi$

联立有 $\begin{cases} a_n = a_n\cos\sqrt{3}n\pi + b_n\sin\sqrt{3}n\pi, \\ b_n = b_n\cos\sqrt{3}n\pi - a_n\sin\sqrt{3}n\pi, \end{cases}$

解得$a_n = b_n = 0$ ($n=1$, 2 , $\cdots$).

而$f(x)$可导，其傅里叶级数处处收敛于$f(x)$,

所以有 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)=\dfrac{a_0}{2}$,

其中$a_0=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$为常数.

END



中国大学MOOC