全国大学生
数学竞赛



第7届决赛

中国大学MOOC

一、填空题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

第1题



(2016决赛,6分) 微分方程$y''-(y')^3=0$的通解是_____.

解 令$y'=p$，则$y''=p'$，　原方程变为$p'=p^3$.

分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p^3}=\mathrm{d}x$，　积分得$-\dfrac{1}{2}p^{-2}=x-C_1$,

即 $p=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2(C_1-x)}}$,　　也即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2(C_1-x)}}$,

分离变量得 $\mathrm{d}y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2(C_1-x)}}\mathrm{d}x$

积分得通解 $y=\pm\sqrt{2(C_1-x)}+C_2$

一、填空题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

第2题



中国大学MOOC

(2016决赛,6分）设 D:$1 \le x^2+y^2 \le 4$,

则 $I=\iint\limits_D (x+y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2-4)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值是_____.

解 先利用对称性，再在极坐标系下运算

$$I=\mathrm{e}^4\Big[\iint\limits_D x\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D y^2\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big]$$

$$=0+4\mathrm{e}^4\iint\limits_{D_1} y^2\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad D_1:1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0$$

$$=4\mathrm{e}^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^2\sin^2\theta\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r$$

$$=4\mathrm{e}^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^3\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}(2\mathrm{e}^3-5).$$

一、填空题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

第3题



中国大学MOOC

(2016决赛,6分)

设$f(t)$二阶连续可导，且$f(t)\neq 0$，若$\begin{cases} x=\int_0^t f(s)\mathrm{d}s, \\ y=f(t), \end{cases}$ 则$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$_____.

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{f'(t)}{f(t)}$,

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{\mathrm{d}\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{f(t)f''(t)-[f'(t)]^2}{f^2(t)}}{f(t)}=\frac{f(t)f''(t)-[f'(t)]^2}{f^3(t)}$$

一、填空题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

第4题



中国大学MOOC

(2016决赛,6分)

设λ_1，λ_2,…，λ_n是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$f(x)$为多项式，则矩阵 $f(\boldsymbol{A})$ 的行列式的值为_____.

解　因为$|\boldsymbol{A}| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$,

所以$|f(\boldsymbol{A})| = f(\lambda_1)f(\lambda_2)\cdots f(\lambda_n)$.

一、填空题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

第5题



(2016决赛,6分) 设 n 为奇数，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[n\sin(\pi n!\mathrm{e})]$ 的值为_____.

解 由 $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots,$

得 $\mathrm{e}=2+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\dfrac{1}{(n+1)!}+\cdots,$

所以，$\pi n!\mathrm{e}=\pi n!\left[2+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\dfrac{1}{(n+1)!}+\cdots\right]$

$=\pi\left[2n!+\dfrac{n!}{2!}+\dfrac{n!}{3!}+\cdots+\dfrac{n!}{(n-1)!}+1\right]+\dfrac{\pi}{n+1}+\dfrac{\pi}{(n+1)(n+2)}+\cdots$

$=a_n\pi+\dfrac{\pi}{n+1}+\dfrac{\pi}{(n+1)(n+2)}+\cdots$ (a_n为整数).

设 n 为奇数，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[n\sin(\pi n!\mathrm{e})]$ 的值为____.

$$a_n\pi+\frac{\pi}{n+1}+\frac{\pi}{(n+1)(n+2)}+\cdots$$

当$n\to\infty$时，$\pi n!\mathrm{e}=a_n\pi+\dfrac{\pi}{n+1}+o(\dfrac{1}{n+1})$，

$$a_n=2n!+\frac{n!}{2!}+\frac{n!}{3!}+\cdots+\frac{n!}{(n-1)!}+1$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}[n\sin(\pi n!\mathrm{e})]=\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\left[a_n\pi+\dfrac{\pi}{n+1}+o(\dfrac{1}{n+1})\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}n\sin\left[\frac{\pi}{n+1}+o(\frac{1}{n+1})\right]=\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{\pi}{n+1}+o(\frac{1}{n+1})\right]=\pi.$$

当 $u\to 0$ 时，$\sin u\sim u$

注意n为奇数

$n=5$时，$a_5=2\cdot 5!+\dfrac{5!}{2!}+\dfrac{5!}{3!}+\dfrac{5!}{4!}+1=2\cdot 5!+(3\cdot 4\cdot 5+4\cdot 5)+5+1$

$n=7$时，$a_7=2\cdot 7!+\dfrac{7!}{2!}+\dfrac{7!}{3!}+\cdots+\dfrac{7!}{6!}+1=2\cdot 7!+(3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7+\cdots+6\cdot 7)+7+1$

二、（14分）



中国大学MOOC

5.(2016决赛,14分) 设$f(u,v)$在全平面上有连续的偏导数，证明：

曲面$f(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c})$=0的所有切平面都交于点$(a,b,c)$.

证明　设$F(x,y,z)=f(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c})$，

$$F_x=\frac{f_1}{z-c},\quad F_y=\frac{f_2}{z-c},\quad F_z=\frac{-(x-a)\,f_1-(y-b)\,f_2}{(z-c)^2}$$

取曲面的法向量　$\vec{n}=\left\{(z-c)f_1',\,(z-c)f_2',\,-(x-a)f_1'-(y-b)f_2'\right\}$.

记(x,y,z)为曲面上的点，(X,Y,Z)为切平面上的点，

则曲面上过点(x,y,z)的平面方程为

$$[(z-c)f_1](X-x)+[(z-c)f_2](Y-y)+[-(x-a)f_1-(y-b)f_2)](Z-z)=0.$$

容易验证，对任意(x,y,z) $(z\neq c)$，$(X,Y,Z)=(a,b,c)$都满足上述切平面方程.

三、（14分）



中国大学MOOC

(2016决赛,14分)

设 $f(x)$在$[a,\ b]$上连续，证明：$2\int_a^b f(x)\left[\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2$.

证 由$f(x)$在$[a,\ b]$上连续知，$f(x)$在$[a,\ b]$上可积，

令$F(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$，则$F'(x)=-f(x)$，$F(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$F(b)=0$

$$2\int_a^b f(x)\left[\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=2\int_a^b f(x)F(x)\mathrm{d}x$$

$$=-2\int_a^b F(x)F'(x)\mathrm{d}x=-2\int_a^b F(x)\mathrm{d}F(x)$$

$$=-F^2(x)\Big|_a^b=F^2(a)-F^2(b)=\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2.$$

四、（14分）



中国大学MOOC

(2016决赛,14分)

设 $\boldsymbol{A}$是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$是 $n\times p$ 矩阵，$\boldsymbol{C}$是 $p\times q$ 矩阵. 证明：

$\mathrm{rank}(\boldsymbol{AB})+\mathrm{rank}(\boldsymbol{BC})-\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})\le\mathrm{rank}(\boldsymbol{ABC})$，其中$\mathrm{rank}(\boldsymbol{X})$表示矩阵$\boldsymbol{X}$的秩.

分析　要证明不等式成立，既要证明

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{AB})+\mathrm{rank}(\boldsymbol{BC})\le\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})+\mathrm{rank}(\boldsymbol{ABC})=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{ABC}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}.$$

证　由于$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m&\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{ABC}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_q&\boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{C}&\boldsymbol{E}_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{AB}\\ -\boldsymbol{BC}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$,

即$\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{AB}\\ -\boldsymbol{BC}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}&-\boldsymbol{E}_q\\ \boldsymbol{E}_p&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{AB}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{B}&\boldsymbol{BC}\end{pmatrix}$，且$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m&\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{E}_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_q&\boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{C}&\boldsymbol{E}_p\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}&-\boldsymbol{E}_q\\ \boldsymbol{E}_p&\boldsymbol{0}\end{pmatrix}$可逆，

所以 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{ABC}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}\boldsymbol{AB}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{B}&\boldsymbol{BC}\end{pmatrix}\ge\mathrm{rank}(\boldsymbol{AB})+\mathrm{rank}(\boldsymbol{BC})$.

五、（14分）



中国大学MOOC

(2016决赛,14分)

设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$, 其中$n$为正整数.

(1) 若$n\geq 2$，计算I_n+I_{n-2};

(2) 设 p 为实数，讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n {I_n}^p$的绝对收敛性和条件收敛性.

解 (1) $I_n+I_{n-2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x(1+\tan^2 x)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\cdot\sec^2 x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\mathrm{d}(\tan x)=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n-1}.$$

（2）由于$0<x<\dfrac{\pi}{4}$，所以$0<\tan x<1$，$\tan^{n+2}x<\tan^n x<\tan^{n-2}x$,

从而$I_{n+2}<I_n<I_{n-2}$，于是$I_{n+2}+I_n<2I_n<I_{n-2}+I_n$.

设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$, 其中$n$为正整数. (1) 若$n\geq 2$，计算$I_n+I_{n-2}$;

(2) 设 p 为实数，讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n{}^p$的绝对收敛性和条件收敛性.

$$I_n+I_{n-2}=\frac{1}{n-1}$$

$$I_{n+2}+I_n<2I_n<I_{n-2}+I_n$$

故$\frac{1}{2(n+1)}<I_n<\frac{1}{2(n-1)}$ ，$\left[\frac{1}{2(n+1)}\right]^p<I_n^p<\left[\frac{1}{2(n-1)}\right]^p$.

当$p>1$时，$\left|(-1)^p I_n^p\right|=I_n^p<\frac{1}{2^p(n-1)^p}\quad(n\geq 2)$,

由于$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^p}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^p$绝对收敛.

设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$，讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n{}^p$的绝对收敛性和条件收敛性.

$$I_n+I_{n-2}=\frac{1}{n-1}$$

$$\left[\frac{1}{2(n+1)}\right]^p<I_n^p<\left[\frac{1}{2(n-1)}\right]^p$$

当$0<p\le 1$时，由于$\left\{I_n^p\right\}$单调减少并趋于0，由莱布尼茨判别法得$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^p$收敛.

而$I_n^p>\frac{1}{2^p(n+1)^p}\ge\frac{1}{2^p}\cdot\frac{1}{n+1}$，且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$发散，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^p I_n^p\right|$发散.

因此$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^p$条件收敛.

当$p\le 0$时，$\left|I_n^p\right|\ge 1$，由级数收敛的必要条件知$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^p$发散.

设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \mathrm{d}x$, 其中$n$为正整数. (1) 若$n \geq 2$，计算$I_n + I_{n-2}$;

(2) 设 p 为实数，讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n^{\ p}$的绝对收敛性和条件收敛性.

综上，

当$p > 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n^{\ p}$绝对收敛；

当$0 < p \leq 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n^{\ p}$条件收敛；

当$p \leq 0$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n^{\ p}$发散.

六、（14分）



中国大学MOOC

(2016决赛,14分) 设$P(x,y,z)$和$R(x,y,z)$在空间上有连续的偏导数，设上半球面$S:z=z_0+\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}$,方向向上，若对任何点$(x_0,y_0,z_0)$和$r>0$，第二型曲面积分$\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$ 证明:$\dfrac{\partial P}{\partial x}=0.$

证明 记上半球面S的底平面为S_1,方向向下，S和S_1围成的区域记为Ω，

由高斯公式得$(\iint\limits_S+\iint\limits_{S_1})P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_\Omega(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}V.$ $S_1:z=z_0$下侧

左边=$(\iint\limits_S+\iint\limits_{S_1})P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0+\iint\limits_{S_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_D R\mathrm{d}\sigma$

则有 $-\iint\limits_D R\mathrm{d}\sigma=\iiint\limits_\Omega(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}V.$ $(*)$

(2016决赛,14分) 设$P(x,y,z)$和$R(x,y,z)$在空间上有连续的偏导数，设上半球面$S:z=z_0+\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}$,方向向上，若对任何点$(x_0,y_0,z_0)$和$r>0$，第二型曲面积分$\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 证明:$\dfrac{\partial P}{\partial x}=0$.

注意到$(*)$式对任何$r>0$成立，由此可证明$R(x_0,y_0,z_0)=0$.

若不然，设$R(x_0,y_0,z_0)\neq 0$，则$\iint\limits_D R\mathrm{d}\sigma=R(\xi,\eta,z_0)\pi r^2$,其中$(\xi,\eta,z_0)\in S_1$.

而当$r\to 0^+$,$R(\xi,\eta,z_0)\to R(x_0,y_0,z_0)$,故$(*)$式左端为$r$的二阶无穷小.

当$\dfrac{\partial P(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}+\dfrac{\partial R(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\neq 0$时，

$\iiint\limits_\Omega(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}V$是$r$的三阶无穷小.

$$-\iint\limits_D R\mathrm{d}\sigma=\iiint\limits_\Omega(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}V \quad (*)$$

(2016决赛,14分) 设$P(x,y,z)$和$R(x,y,z)$在空间上有连续的偏导数，设上半球面$S:z=z_0+\sqrt{r^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}$,方向向上，若对任何点$(x_0,y_0,z_0)$和$r>0$，第二型曲面积分$\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 证明:$\dfrac{\partial P}{\partial x}=0.$

当$\dfrac{\partial P(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}+\dfrac{\partial R(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}=0$时，该积分是比$r^3$高阶的无穷小，

因此(*)式右端是左端的高阶无穷小，从而当r很小时，

有$\left|\iint\limits_D R\mathrm{d}\sigma\right|\geq\left|\iiint\limits_\Omega(\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}V\right|$,这与(*)式矛盾.

$$-\iint\limits_D R\mathrm{d}\sigma=\iiint\limits_\Omega(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z})\mathrm{d}V \quad (*)$$

由于在任何点$R(x_0,y_0,z_0)=0$,故$R(x,y,z)\equiv 0.$

代入(*)式得$\iiint\limits_\Omega\dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial x}\mathrm{d}V=0\Rightarrow\dfrac{\partial P}{\partial x}\equiv 0.$

END



中国大学MOOC