全国大学生
数学竞赛



第7届预赛

中国大学MOOC

一、解答下列各题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

(要求写出重要步骤)

第1题



中国大学MOOC

(2015预赛,6分) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n^2+2}+\dfrac{\sin\frac{3\pi}{n}}{n^2+3}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right)=$ _____.

解 $x_n \geq n\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+n}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n^2+n}+\dfrac{\sin\frac{3\pi}{n}}{n^2+n}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right)$ 缩小

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{3\pi}{n}}{n+1}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}$$

$$x_n \leq n\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n^2}+\frac{\sin\frac{3\pi}{n}}{n^2}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n^2}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}$$ 放大

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n^2+2}+\frac{\sin\frac{3\pi}{n}}{n^2+3}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n^2+n}\right)$$

即 $\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\frac{2}{\pi},$$

由夹逼准则，可得 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}=\frac{2}{\pi}$.

中国大学MOOC

一、解答下列各题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

(要求写出重要步骤)

第2题



中国大学MOOC

2.(2015预赛, 6分) 设函数$z=z(x,y)$由方程$F(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x})=0$所决定，其中$F(u,v)$具有连续的偏导数，且$xF_u+yF_v\neq 0$，则$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$_____.(本小题结果要求不显含$F$及其偏导数)

解　方程两端关于x求偏导数可得　$(1+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x})F_u+(-\frac{z}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x})F_v=0,$

解得　$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y(zF_v-x^2F_u)}{x(xF_u+yF_v)}.$　　对y求偏导解得　$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x(zF_u-y^2F_v)}{y(xF_u+yF_v)},$

于是　$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y(zF_v-x^2F_u)}{x(xF_u+yF_v)}+\frac{x(zF_u-y^2F_v)}{xF_u+yF_v}=\frac{z(xF_u+yF_v)-xy(xF_u+yF_v)}{xF_u+yF_v}$

$=z-xy.$

一、解答下列各题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

(要求写出重要步骤)

第3题



中国大学MOOC

(2015预赛, 6分) 曲面$z=x^2+y^2+1$在点$M(1,-1,3)$的切平面与曲面$z=x^2+y^2$所围区域的体积为_____.

解 曲面$z=x^2+y^2+1$在点$M(1,-1,3)$的切平面为

$$2(x-1)-2(y+1)-(z-3)=0,\ \text{即}z=2x-2y-1$$

联立$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=2x-2y-1 \end{cases}$ 得所围区域在 xOy 面上的投影D为

$$D=\left\{(x,y)\middle|(x-1)^2+(y+1)^2\le 1\right\}.$$

所求体积为

$$V=\iint_D\left[(2x-2y-1)-(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}\sigma=\iint_D\left[1-(x-1)^2-(y+1)^2\right]\mathrm{d}\sigma.$$

(2015预赛, 6分) 曲面$z=x^2+y^2+1$在点$M(1,-1,3)$的切平面与曲面$z=x^2+y^2$所围区域的体积为_____.

所求体积为

$$V=\iint_D\left[(2x-2y-1)-(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}\sigma=\iint_D\left[1-(x-1)^2-(y+1)^2\right]\mathrm{d}\sigma.$$

令$x-1=r\cos t$，$y+1=r\sin t$，则$\mathrm{d}\sigma=r\mathrm{d}t\mathrm{d}r$，$D:\begin{cases}0\le t\le 2\pi\\0\le r\le 1\end{cases}$，

所以 $V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t\int_0^1(1-r^2)r\mathrm{d}r=\dfrac{\pi}{2}$

一、解答下列各题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

(要求写出重要步骤)

第4题



中国大学MOOC

(2015预赛,6分)

函数$f(x)=\begin{cases}3, & x\in[-5,0)\\ 0, & x\in[0,5)\end{cases}$，定义在$(-5,5]$内的傅立叶级数$x=0$处的收敛值为_____.

解　由狄利克雷收敛定理，得$\boldsymbol{S(0)=\dfrac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\dfrac{3}{2}}$.

一、解答下列各题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

(要求写出重要步骤)

第5题



中国大学MOOC

(2015预赛,6分) 设区间$(0,+\infty)$上的函数$u(x)$定义为$u(x)=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2}\mathrm{d}t$,则$u(x)$的初等函数表达式为_____.

解 $$u^2(x)=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2}\mathrm{d}t\cdot\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xs^2}\mathrm{d}s=\iint\limits_{s,t\geq 0} \mathrm{e}^{-x(t^2+s^2)}\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$

$$\overset{\text{极坐标}}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xr^2}\cdot r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\cdot\lim_{a\to+\infty}\int_0^a \mathrm{e}^{-xr^2}\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2x}\right)\lim_{a\to+\infty}\int_0^a \mathrm{e}^{-xr^2}\mathrm{d}(-xr^2)=-\frac{\pi}{4x}\lim_{a\to+\infty}\left(\mathrm{e}^{-xa^2}-1\right)$$

$$=\frac{\pi}{4x}.$$

所以$u(x)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.

二、（12分）



中国大学MOOC

(2015预赛, 12分) 设M是以三个正半轴为母线的半圆锥面，求其方程.

解　显然$O(0,0,0)$为M的顶点，$A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$C(0,0,1)$在M上，

A、B、C三点决定平面$x+y+z=1$与球面$x^2+y^2+z^2=1$的交线L是M的准线.

设$P(x,\ y,\ z)$是M上的点，$(u,\ v,\ w)$是母线OP与L的交点，

则 $\begin{cases} u+v+w=1 \\ u^2+v^2+w^2=1 \end{cases}$ ①　直线OP的方程为 $\dfrac{x}{u}=\dfrac{y}{v}=\dfrac{z}{w}=\dfrac{1}{t}$,

即$u=xt,\ v=yt,\ w=zt$　代入①得 $\begin{cases} (x+y+z)t=1, \\ (x^2+y^2+z^2)t^2=1. \end{cases}$

消去t，有$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2$，整理得圆锥面M的方程为$xy+yz+zx=0$.

三、（12分）



中国大学MOOC

(2015预赛, 12分)

设$f(x)$在$(a，b)$内二次可导，且存在常数α，β使得对$\forall x\in(a，b)$，$f'(x)=\alpha f(x)+\beta f''(x)$，证明$f(x)$在$(a，b)$内无穷次可导.

证明 (1) 若$\beta=0$，则$\forall x\in(a，b)$，有

$$f'(x)=\alpha f(x)，\ f''(x)=\alpha^2 f(x),\cdots，\ f^{(n)}(x)=\alpha^n f(x),\cdots,$$

从而$f(x)$在$(a，b)$内无穷次可导.

(2) 若$\beta\neq 0$，则$\forall x\in(a，b)$，有

$$f''(x)=\frac{f'(x)-\alpha f(x)}{\beta}=A_1 f'(x)+B_1 f(x), \qquad ①$$

$$A_1=\frac{1}{\beta}，\ B_1=-\frac{\alpha}{\beta}.$$

设$f(x)$在$(a,\ b)$内二次可导，且存在常数α，β使得对$\forall x\in(a,\ b)$，$f'(x)=\alpha f(x)+\beta f''(x)$，证明$f(x)$在$(a,\ b)$内无穷次可导.

$$f''(x)=\frac{f'(x)-\alpha f(x)}{\beta}=A_1 f'(x)+B_1 f(x), \qquad ①$$

因为①式右端可导，从而有 $f'''(x)=A_1 f''(x)+B_1 f'(x).$

设$f^{(n)}(x)=A_1 f^{(n-1)}(x)+B_1 f^{(n-2)}(x)$，$n>1$,

则 $f^{(n+1)}(x)=A_1 f^{(n)}(x)+B_1 f^{(n-1)}(x).$

所以$f(x)$在$(a,\ b)$内无穷次可导.

四、（14分）



中国大学MOOC

(2015预赛, 14分) 求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$的收敛域与和函数.

解 因$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+2}{(n+1)(n^3+2)}=0$,

所以收敛半径$R=+\infty$，收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

$$\frac{n^3+2}{(n+1)!}=\frac{(n^3-n)+(n+1)+1}{(n+1)!}=\frac{(n+1)n(n-1)}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1)!}$$

$$=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}\ (n\geq 2)$$

幂级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n-2)!},\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!},\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$的收敛域都为$(-\infty,+\infty)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n-2)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)!}.$$

求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$的收敛域与和函数.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n-2)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)!}.$$

$$S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n-2)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+2}}{n!}=(x-1)^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}=(x-1)^2\mathrm{e}^{x-1},$$

$$S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}=\mathrm{e}^{x-1},$$

$$\mathrm{e}^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$$

$$S_3(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)!}=\frac{1}{x-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{1}{x-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n!}=\frac{\mathrm{e}^{x-1}-1}{x-1}\quad(x\neq 1).$$

综上可得幂函数的和函数为 $S(x)=\begin{cases}(x-2x+2)\mathrm{e}^{x-1}+\dfrac{1}{x-1}(\mathrm{e}^{x-1}-1), & x\neq 1,\\ 2, & x=1.\end{cases}$

五、（16分）



中国大学MOOC

(2015预赛, 16分) 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$.

试证：(1) $\exists x_0\in[0,1]$，使得$|f(x_0)|>4$; (2) $\exists x_1\in[0,1]$，使得$|f(x_1)|=4$.

证 （1）反证法，假设$\forall x\in[0,1],|f(x)|\le 4$,

一方面，$\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right||f(x)|\mathrm{d}x\ge\int_0^1(x-\frac{1}{2})f(x)\mathrm{d}x=1$,

另一方面，$\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right||f(x)|\mathrm{d}x\le 4\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x=1$.

因此，$\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right||f(x)|\mathrm{d}x=1$. 而$4\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x=1$,

故 $\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|(4-|f(x)|)\mathrm{d}x=0$. 所以对于任意的$x\in[0,1],|f(x)|=4$.

$$\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}-x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1(x-\frac{1}{2})\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=1$. 试证：

(1) $\exists x_0\in[0,1]$，使得$|f(x_0)|>4$；　(2) $\exists x_1\in[0,1]$，使得$|f(x_1)|=4$.

对于任意的$x\in[0,1]$,$|f(x)|=4$.

又由$f(x)$的连续性知　$f(x)\equiv 4$或$f(x)\equiv -4$.　这与条件$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$矛盾.

所以$\exists x_0\in[0,1]$，使得　$|f(x_0)|>4$.

（2）先证$\exists x_2\in[0,1]$，使得$|f(x_2)|<4$.

若不然，$\forall x\in[0,1]$,$|f(x)|\geq 4$，则$f(x)\geq 4$或$f(x)\leq -4$恒成立，与$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$矛盾.

$\exists x_0\in[0,1]$，使得$|f(x_0)|>4$；　$\exists x_2\in[0,1]$，使得$|f(x_2)|<4$.

由$f(x)$连续，根据介值定理可得$\exists x_1\in[0,1]$，使得$|f(x_1)|=4$.

六、（16分）



中国大学MOOC

1.(2015年预赛，16分）设$f(x,y)$在$x^2+y^2\le 1$上有连续的二阶偏导数，$f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\le M$. 若$f(0,0)=0$，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，

证明：$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\le\frac{\pi\sqrt{M}}{4}$.

二元函数$f(x,y)$的一阶麦克劳林公式

$$f(x,y)=f(0,0)+(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})f(0,0)+\frac{1}{2!}(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^2 f(\theta x,\theta y)$$

$$=\frac{1}{2}(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2})f(\theta x,\theta y),\quad \theta\in(0,1).$$

(2015年预赛，16分）设$f(x,y)$在$x^2+y^2\le 1$上有连续的二阶偏导数，$f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\le M$. 若$f(0,0)=0$，$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，

证明：$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\le\dfrac{\pi\sqrt{M}}{4}$.

证 在$(0,0)$处展开$f(x,y)$得

$$f(x,y)=\frac{1}{2}(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y})^2 f(\theta x,\theta y)=\frac{1}{2}(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2})f(\theta x,\theta y),\quad \theta\in(0,1)$$

记$(u,v,w)=(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2}{\partial y^2})f(\theta x,\theta y)$，则 $f(x,y)=\dfrac{1}{2}(ux^2+2vxy+wy^2)$.

已知条件$f_{xx}^2+2f_{xy}^2+f_{yy}^2\le M\Leftrightarrow u^2+2v^2+w^2\le M$

证明：$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \le \dfrac{\pi\sqrt{M}}{4}.$

已知$u^2+2v^2+w^2\le M$

$f(x,y)=\dfrac{1}{2}(ux^2+2vxy+wy^2).$

$f(x,y)=\dfrac{1}{2}\{u,\sqrt{2}v,w\}\cdot\{x^2,\sqrt{2}xy,y^2\}$

由于 $\left|\{u,\sqrt{2}v,w\}\right|=\sqrt{u^2+2v^2+w^2}\le\sqrt{M}$,

以及 $\left|\{x^2,\sqrt{2}xy,y^2\}\right|=\sqrt{x^4+2x^2y^2+y^4}=x^2+y^2$,

于是有 $\left|\{u,\sqrt{2}v,w\}\cdot\{x^2,\sqrt{2}xy,y^2\}\right|\le\sqrt{M}(x^2+y^2)$，

即 $|f(x,y)|\le\dfrac{1}{2}\sqrt{M}(x^2+y^2)$， 根据保序性，有

$$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma \le \left|\frac{1}{2}\sqrt{M}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| = \frac{\pi\sqrt{M}}{4}.$$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}$$

END



中国大学MOOC