全国大学生
数学竞赛



第6届决赛

中国大学MOOC

一、填空题

(本题共6个小题，每小题5分，共30分)

第1题



中国大学MOOC

(2015决赛,5分)

求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\int_0^x \mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2u^2}\mathrm{d}u}=$ _____ $\dfrac{\infty}{\infty}$

解 $\text{原式}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\int_0^x \mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u\cdot \mathrm{e}^{x^2}}{\mathrm{e}^{2x^2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2\int_0^x \mathrm{e}^{u^2}\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^{x^2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2\mathrm{e}^{x^2}}{2x\mathrm{e}^{x^2}}=0$$

一、填空题

(本题共6个小题，每小题5分，共30分)

第2题



(2015决赛,5分) 设实数$a \neq 1$，微分方程$\begin{cases} y'' - a(y')^2 = 0, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1 \end{cases}$的解为_____

解　方程为可降阶的微分方程，令$y' = p(x)$，则$y'' = p'(x)$,

将y'，y''代入原方程，得$p' - ap^2 = 0$,

分离变量后有 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p^2} = a\mathrm{d}x$　　积分得$-\dfrac{1}{p} = ax + C_1$

由$p(0) = -1 \Rightarrow C_1 = 1$,　　所以有 $y' = -\dfrac{1}{ax+1}$

积分得　$y = -\dfrac{1}{a}\ln(ax+1) + C_2$.

由$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$.　　所以方程的解为$y = -\dfrac{1}{a}\ln(ax+1)$.

一、填空题

(本题共6个小题，每小题5分，共30分)

第3题



中国大学MOOC

(2015决赛,5分) 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ -1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{A}^{50}=$_____.

解　记$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$，　则$\boldsymbol{B}^{2}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{A}^{50}=(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{50}=\lambda^{50}\boldsymbol{E}+50\lambda^{49}\boldsymbol{B}$$

$$(u+v)^{n}=u^{n}v^{0}+nu^{n-1}v+\frac{n(n-1)}{2!}u^{n-2}v^{2}+\cdots+u^{0}v^{n}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^{50} & 0 & 0\\ 0 & \lambda^{50} & 0\\ 0 & 0 & \lambda^{50}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -50\lambda^{49} & 50\lambda^{49} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^{50} & 0 & 0\\ 0 & \lambda^{50} & 0\\ -50\lambda^{49} & 50\lambda^{49} & \lambda^{50}\end{bmatrix}.$$

一、填空题

(本题共6个小题，每小题5分，共30分)

第4题



(2015决赛,5分) 不定积分$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x =$ _____.

解法1 $I = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2+(x-\frac{1}{x})^2}\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}(x-\frac{1}{x})+C.$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

不定积分$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x=$_____.

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

解法2 $$I=\int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2-(\sqrt{2}\,x)^2}\mathrm{d}x=\int \frac{x^2+1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}x-1)+\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan(\sqrt{2}x+1)+C.$$

一、填空题

(本题共6个小题，每小题5分，共30分)

第5题



中国大学MOOC

(2015决赛,5分) 设曲线积分$I=\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{|x|+|y|}$,其中$L$是以$(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$为顶点的正方形的边界曲线，方向为逆时针，则$I=$_____.

解 曲线L的方程为$|x|+|y|=1$，$I=\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{|x|+|y|}=\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$

记该曲线所围区域为正方形D，其边长为$\sqrt{2}$，面积为2.

由格林公式，有

$$I=\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\iint_D (1+1)\mathrm{d}\sigma=2\sigma=4.$$

一、填空题

(本题共6个小题，每小题5分，共30分)

第6题



中国大学MOOC

(2015决赛,5分) 设 D 是平面上由光滑封闭曲线围成的有界区域，其面积 $A>0$，函数 $f(x,y)$ 在该区域及边界上连续且 $f(x,y)>0$.记 $J_n=\left(\frac{1}{A}\iint\limits_D f^{\frac{1}{n}}(x,y)\mathrm{d}\sigma\right)^n$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} J_n=$ _____.

解 设 $F(t)=\frac{1}{A}\iint\limits_D f^t(x,y)\mathrm{d}\sigma$，则

$$\lim_{n\to\infty} J_n=\lim_{t\to0^+}(F(t))^{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to0^+}\mathrm{e}^{\frac{\ln F(t)}{t}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\ln F(t)}{t}}.$$

$$F(0)=\frac{1}{A}\iint\limits_D f^0(x,y)\mathrm{d}\sigma=1$$

$$\text{又}\lim_{t\to0^+}\frac{\ln F(t)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln F(t)-\ln F(0)}{t-0}=[\ln F(t)]'\Big|_{t=0}=\frac{F'(0)}{F(0)}=F'(0),$$

故有 $\lim\limits_{n\to\infty} J_n=\mathrm{e}^{F'(0)}$　　$F'(0)=?$

记 $J_n=\left(\frac{1}{A}\iint\limits_D f^{\frac{1}{n}}(x,y)\mathrm{d}\sigma\right)^n$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}J_n=$ _____.

$$F(t)=\frac{1}{A}\iint\limits_D f^t(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

故有 $\lim\limits_{n\to\infty}J_n=\mathrm{e}^{F'(0)}$

$$F'(0)=\lim_{t\to0}\frac{F(0+t)-F(0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{A}\iint\limits_D f^t(x,y)\mathrm{d}\sigma-\frac{1}{A}\iint\limits_D f^0(x,y)\mathrm{d}\sigma}{t}=\frac{1}{A}\iint\limits_D\left[\lim_{t\to0}\frac{f^t(x,y)-f^0(x,y)}{t}\right]\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{1}{A}\iint\limits_D\left[f^t(x,y)\right]'|_{t=0}\mathrm{d}\sigma \qquad \left(a^x\right)'=a^x\ln a$$

$$=\frac{1}{A}\iint\limits_D\left[f^t(x,y)\ln f(x,y)\right]|_{t=0}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{A}\iint\limits_D\ln f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

故有 $\lim\limits_{n\to\infty}J_n=\mathrm{e}^{F'(0)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{A}\iint\limits_D\ln f(x,y)\mathrm{d}\sigma}$.

二、（12分）



中国大学MOOC

(2015决赛,12分)

设$\boldsymbol{l}_j(j=1,2,\cdots,n)$是平面上点$P_0$处的$n\geq 2$个方向向量，相邻两个向量之间的夹角为$\frac{2\pi}{n}$，若函数$f(x,y)$在点$P_0$有连续偏导数，证明：$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(P_0)}{\partial \boldsymbol{l}_j}=0.$

解 不妨设$\boldsymbol{l}_j(\boldsymbol{j=1,2,\cdots,n})$都为单位向量，且设$\boldsymbol{l}_j=(\cos(\theta+\frac{2\pi j}{n}),\sin(\theta+\frac{2\pi j}{n}))$,

$$\nabla f(P_0)=(\frac{\partial f(P_0)}{\partial x},\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$$

则有$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \boldsymbol{l}_j}=\nabla f(P_0)\cdot \boldsymbol{l}_j.$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b_1}+\vec{b_2}+\cdots+\vec{b_n})=\vec{a}\cdot\vec{b_1}+\vec{a}\cdot\vec{b_2}+\cdots+\vec{a}\cdot\vec{b_n}$$

因此$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(P_0)}{\partial \boldsymbol{l}_j}=\sum_{j=1}^{n}\nabla f(P_0)\cdot \boldsymbol{l}_j=\nabla f(P_0)\cdot\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{l}_j=\nabla f(P_0)\cdot\boldsymbol{0}=0$

三、（14分）



中国大学MOOC

(2015决赛,14分)

设$\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$，$\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{B}_2$均为n阶方阵，其中$\boldsymbol{A}_2$，$\boldsymbol{B}_2$可逆.证明：存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$使得$\boldsymbol{PA}_i\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}_i\,(i=1,2)$成立的充要条件是$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2^{-1}$和$\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2^{-1}$相似.

证 若存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$使得$\boldsymbol{PA}_i\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}_i\,(i=1,2)$，则$\boldsymbol{B}_2^{-1}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}$，

所以$\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2^{-1}=\boldsymbol{PA}_1\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}$，故$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2^{-1}$和$\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2^{-1}$相似.

反之，若$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2^{-1}$和$\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2^{-1}$相似，则存在可逆矩阵$\boldsymbol{C}$，使得$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2^{-1}$，

于是$\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{CB}_2=\boldsymbol{B}_1$，令$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}^{-1}$，$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{CB}_2$，

则$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$可逆，且满足$\boldsymbol{PA}_i\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}_i\,(i=1,2)$

四、（14分）



中国大学MOOC

(2015决赛,14分)

设$p>0$，$x_1=\frac{1}{4}$，且$x_{n+1}^p=x_n^p+x_n^{2p}(n=1,2,\cdots)$. 证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x_n^p}$收敛，并求其和.

解 记$y_n=x_n^p$，则$y_{n+1}=y_n+y_n^2$，$y_{n+1}-y_n=y_n^2>0$，所以$y_{n+1}>y_n$.

先证$n\to\infty$时，$y_n\to+\infty$.

（反证法） 假设y_n收敛，即有上界.

记$A=\lim_{n\to\infty}y_n$，从而$A=A+A^2$，所以$A=0$. 矛盾，故$y_n\to+\infty$.

由$y_{n+1}=y_n(1+y_n)$，即$\frac{1}{y_{n+1}}=\frac{1}{y_n}-\frac{1}{1+y_n}$，

得$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+y_k}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{y_k}-\frac{1}{y_{k+1}})=\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}\right)+\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{y_n}-\frac{1}{y_{n+1}}\right)$

设$p>0$，$x_1=\frac{1}{4}$，且$x_{n+1}^p=x_n^p+x_n^{2p}(n=1,2,\cdots)$. 证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x_n^p}$收敛，并求其和.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+y_k}=\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}\right)+\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{y_n}-\frac{1}{y_{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_{n+1}}.$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x_n^p}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+y_k}=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_{n+1}})=\frac{1}{y_1}=4^p.$

即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x_n^p}$收敛，且其和为$4^p$.

五、（15分）



中国大学MOOC

(2015决赛,15分)

(1) 将$[-\pi,\ \pi)$上的函数$f(x)=|x|$展开成傅里叶级数，并证明 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

(2) 求积分$I=\int_0^{+\infty}\frac{u}{1+\mathrm{e}^u}\mathrm{d}u$的值.

解 (1) $f(x)=|x|$为偶函数，其傅里叶级数是余弦级数.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\pi$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}-\frac{4}{n^2\pi}, & n=1,3,\cdots,\\ 0, & n=2,4,\cdots.\end{cases}$$

由于$f(x)$连续，所以当$x\in[-\pi,\ \pi)$时，有

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots).$$

(1) 将$[-\pi,\ \pi)$上的函数$f(x)=|x|$展开成傅里叶级数，并证明 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

(2) 求积分$I=\int_0^{+\infty}\dfrac{u}{1+\mathrm{e}^u}\mathrm{d}u$ 的值.

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right),\ x\in[-\pi,\ \pi)$$

令$x=0$，得$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}$.　　记 $S_1=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$，$S_2=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}$，

则$S_1-S_2=\dfrac{1}{4}S_1$，故$S_1=\dfrac{4}{3}S_2=\dfrac{\pi^2}{6}$.

(2) 令$g(u)=\dfrac{u}{1+\mathrm{e}^u}$，则 $g(u)=\dfrac{u\mathrm{e}^{-u}}{1+\mathrm{e}^{-u}}=u\mathrm{e}^{-u}-u\mathrm{e}^{-2u}+u\mathrm{e}^{-3u}-\cdots$，$u\in[0,+\infty)$

记该级数的前n项和为$S_n(u)$，余项为$r_n(u)=g(u)-S_n(u)$，

(2) 求积分$I=\int_0^{+\infty}\frac{u}{1+\mathrm{e}^u}\mathrm{d}u$的值.

令$g(u)=\frac{u}{1+\mathrm{e}^u}$，则 $g(u)=\frac{u\mathrm{e}^{-u}}{1+\mathrm{e}^{-u}}=u\mathrm{e}^{-u}-u\mathrm{e}^{-2u}+u\mathrm{e}^{-3u}-\cdots$， $u\in[0,+\infty)$

则由交错级数的性质知$|r_n(u)|\le u\mathrm{e}^{-(n+1)u}$.

因为$\int_0^{+\infty}u\mathrm{e}^{-nu}\mathrm{d}u=\frac{1}{n^2}$，就有$\int_0^{+\infty}|r_n(u)|\mathrm{d}u\le\frac{1}{(n+1)^2}$，

于是有 $\int_0^{+\infty}g(u)\mathrm{d}u=\int_0^{+\infty}S_n(u)\mathrm{d}u+\int_0^{+\infty}r_n(u)\mathrm{d}u=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}+\int_0^{+\infty}r_n(u)\mathrm{d}u$.

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}r_n(u)\mathrm{d}u=0$，故$I=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$,

所以$I+\frac{1}{2}S_1=S_1$，由(1)得$I=\frac{1}{2}S_1=\frac{\pi^2}{12}$.

六、（15分）



中国大学MOOC

2.(2015决赛，15分）设 $f(x,y)$ 为 R^2 上的非负连续函数，若 $\lim\limits_{t\to+\infty}\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 存在极限，则称广义积分 $\iint\limits_{R^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 收敛于 I.

(1) 设 $f(x,y)$ 为 R^2 上非负连续函数，若 $\iint\limits_{R^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 收敛于 I ，证明极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\iint\limits_{-t\le x,y\le t} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 存在且等于 I.

(2) 设 $\iint\limits_{R^2} \mathrm{e}^{ax^2+2bxy+cy^2}\,\mathrm{d}\sigma$ 收敛于 I ,其中实二次型 $ax^2+2bxy+cy^2$ 在正交变换下的标准型为 $\lambda_1u^2+\lambda_2v^2$. 证明 λ_1 和 λ_2 都小于零.

(1) 设 $f(x,y)$ 为 R^2 上非负连续函数，若 $\iint\limits_{R^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 收敛于 I ，证明极限 $\lim\limits_{t\to+\infty} \iint\limits_{-t\le x,y\le t} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 存在且等于 I.

证明 (1)由于 $f(x,y)$ 非负，所以根据保序性

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le \iint\limits_{-t\le x,y\le t} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \le \iint\limits_{x^2+y^2\le 2t^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

由 $\iint\limits_{R^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 收敛于 I

得 $\lim\limits_{t\to+\infty} \iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = I$，$\lim\limits_{t\to+\infty} \iint\limits_{x^2+y^2\le 2t^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = I$，

故由夹逼准则知 $\lim\limits_{t\to+\infty} \iint\limits_{-t\le x,y\le t} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = I.$

(2) 设 $\iint\limits_{R^2} \mathrm{e}^{ax^2+2bxy+cy^2}\,\mathrm{d}\sigma$ 收敛于 I ,其中实二次型 $ax^2+2bxy+cy^2$ 在正交变换下的标准型为 $\lambda_1 u^2+\lambda_2 v^2$. 证明 λ_1 和 λ_2 都小于零.

（2）记 $I(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} \mathrm{e}^{ax^2+2bxy+cy^2}\,\mathrm{d}\sigma$, 则 $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t)=I.$

记$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, 则 $ax^2+2bxy+cy^2 = (x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

因A是实对称的，所以存在正交矩阵P使得

$P^TAP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$,其中$\lambda_1$，$\lambda_2$是$A$的特征值，也就是标准型的系数.

在变换 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ 下 $ax^2+2bxy+cy^2 = \lambda_1 u^2+\lambda_2 v^2.$

(2) 设 $\iint\limits_{R^2} \mathrm{e}^{ax^2+2bxy+cy^2}\,\mathrm{d}\sigma$ 收敛于 I，其中实二次型 $ax^2+2bxy+cy^2$ 在正交变换下的标准型为 $\lambda_1u^2+\lambda_2v^2$．证明 λ_1 和 λ_2 都小于零.

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\Rightarrow (x,y)=(u,v)P^T\Rightarrow \boxed{(u,v)=(x,y)P}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=P^T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}$$

又由于 $u^2+v^2=(u,v)\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=(x,y)PP^T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(x,y)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x^2+y^2$,

故变换把圆盘 $x^2+y^2\le t^2$ 变为 $u^2+v^2\le t^2$，且 $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=|P|=1$,

$$I(t)=\iint\limits_{u^2+v^2\le t^2}\mathrm{e}^{\lambda_1u^2+\lambda_2v^2}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint\limits_{u^2+v^2\le t^2}\mathrm{e}^{\lambda_1u^2+\lambda_2v^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

由 $\lim\limits_{t\to+\infty}I(t)=I$ 和(1)所得结果，得 $\lim\limits_{t\to+\infty}\iint\limits_{-t\le u,v\le t}\mathrm{e}^{\lambda_1u^2+\lambda_2v^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=I.$

(2) 设 $\iint\limits_{R^2} \mathrm{e}^{ax^2+2bxy+cy^2}\,\mathrm{d}\sigma$ 收敛于 I ,其中实二次型 $ax^2+2bxy+cy^2$ 在正交变换下的标准型为 $\lambda_1 u^2+\lambda_2 v^2$. 证明 λ_1 和 λ_2 都小于零.

$$\lim_{t\to+\infty} \iint\limits_{-t\le u,v\le t} \mathrm{e}^{\lambda_1 u^2+\lambda_2 v^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = I.$$

在矩形上分离积分变量，得

$$\iint\limits_{-t\le u,v\le t} \mathrm{e}^{\lambda_1 u^2+\lambda_2 v^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{-t}^{t} \mathrm{e}^{\lambda_1 u^2}\mathrm{d}u \int_{-t}^{t} \mathrm{e}^{\lambda_2 v^2}\mathrm{d}v = I_1(t)I_2(t).$$

因为 $I_1(t), I_2(t)$ 都是严格单调增加的，故 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} \mathrm{e}^{\lambda_1 u^2}\mathrm{d}u$ 收敛，

所以有 $\lambda_1<0$;

同理有 $\lambda_2<0$.

END



中国大学MOOC