全国大学生
数学竞赛



第6届预赛

中国大学MOOC

一、填空题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

第1题



中国大学MOOC

(2014预赛,6分)

已知$y_1 = \mathrm{e}^x$，$y_2 = x\mathrm{e}^x$是二阶齐次常系数线性微分方程的解，则该方程是(　　).

解　由解的表达式知微分方程的特征根有二重根 $r_1 = r_2 = 1$,

对应特征方程为 $r^2 - 2r + 1 = 0$,

故所求微分方程为 $y'' - 2y' + y = 0$.

一、填空题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

第2题



中国大学MOOC

1.(2014预赛, 6分) 设有曲面$S: z = x^2 + 2y^2$和平面$L: 2x + 2y + z = 0$，则与L平行的S的切平面方程是_____.

解　设$P_0(x_0, y_0, z_0)$，则曲面S在点P_0的切平面方程为

$$-2x_0(x - x_0) - 4y_0(y - y_0) + (z - z_0) = 0$$

由于该切平面和平面L平行，所以相应的法向量成比例，即存在常数$k \neq 0$使得　$\{-2x_0, -4y_0, 1\} = k\{2, 2, 1\}$,

解得$x_0 = -1, y_0 = -\frac{1}{2}, z_0 = \frac{3}{2}$,

故所求切平面方程为　$2x + 2y + z + \frac{3}{2} = 0$

一、填空题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

第3题



中国大学MOOC

(2014预赛,6分)

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x=\int_1^{y-x}\sin^2(\frac{\pi t}{4})\mathrm{d}\,t$ 所确定，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=0}=$(　　).

解　等式两端同时对x求导得 $1=\sin^2\left[\frac{\pi}{4}(y-x)\right]\cdot(y'-1)$

$$\sin^2\left[\frac{\pi}{4}(y-x)\right]\cdot y'=1+\sin^2\left[\frac{\pi}{4}(y-x)\right].$$

$$y'=\csc^2\left[\frac{\pi}{4}(y-x)\right]+1.$$

显然 $y(0)=1$,　　将$x=0$，$y=1$代入可得 $y'|_{x=0}=3.$

一、填空题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

第4题



中国大学MOOC

(2014预赛,6分) 设$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$, 则$\lim_{n\to\infty}x_n=$(　　).

解　$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right]$

$$=(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!})+(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!})+\cdots+\left[\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right]$$

$$=1-\frac{1}{(n+1)!}.$$

所以　$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{(n+1)!}\right]=1.$

一、填空题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

第5题



中国大学MOOC

(2014预赛,6分) 已知$\lim\limits_{x\to 0}(1+x+\dfrac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$(　　).

解　由$\lim\limits_{x\to 0}(1+x+\dfrac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$可得　　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x+\dfrac{f(x)}{x})=3.$

故有$\dfrac{1}{x}\ln(1+x+\dfrac{f(x)}{x})=3+\alpha$，其中$\alpha\to 0(x\to 0)$,

$\ln(1+x+\dfrac{f(x)}{x})=3x+\alpha x$,　　$1+x+\dfrac{f(x)}{x}=\mathrm{e}^{3x+\alpha x}$，　$\dfrac{f(x)}{x}=\mathrm{e}^{3x+\alpha x}-1-x$,

即有　$\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{\mathrm{e}^{3x+\alpha x}-1}{x}-1.$

当$u\to 0$时，　$\mathrm{e}^u-1\sim u$

从而　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{3x+\alpha x}-1}{x}-1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3+\alpha)x}{x}-1=2$

二、（12分）



中国大学MOOC

(2014预赛, 12分) 设 n为正整数，计算$I=\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(\ln\frac{1}{x})\right|\mathrm{d}x.$

解 $I=\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(\ln x)\right|\mathrm{d}x$

$=\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\left|\sin(\ln x)\right|\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\left|\sin(\ln x)\right|\mathrm{d}\ln x.$

则有 $I=\int_{-2n\pi}^{0}\left|\sin u\right|\mathrm{d}u$ 令$\ln x=u$,

$=\int_{0}^{2n\pi}\left|\sin t\right|\mathrm{d}t$ 令$u=-t$,

$=4n\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,\mathrm{d}t=4n$

三、（14分）



中国大学MOOC

(2014预赛, 12分) 设 函数$f(x)$在$[0,1]$上有二阶导数，且有正常数A，B使得$|f(x)|\le A, |f''(x)|\le B$.证明：对任意$x\in[0,1]$，有$|f'(x)|\le 2A+\frac{B}{2}$.

证明　将$f(t)$在x处展为泰勒公式，有

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(t-x)^2,\ \xi\text{介于}t\text{与}x\text{之间}$$

令$t=0$得　$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(0-x)^2,\ \xi\in(0,\ x),$　①

令$t=1$得　$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2,\ \eta\in(x,1).$　②

②−①得　$f(1)-f(0)=f'(x)+\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2-\frac{f''(\xi)}{2}x^2$

即　$f'(x)=f(1)-f(0)+\frac{f''(\xi)}{2}x^2-\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2.$

设 函数$f(x)$在$[0,1]$上有二阶导数，且有正常数A，B使得$|f(x)|\le A$，$|f''(x)|\le B$.证明：对任意$x\in[0,1]$，有$|f'(x)|\le 2A+\frac{B}{2}$.

即 $f'(x)=f(1)-f(0)+\frac{f''(\xi)}{2}x^2-\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2$.

有 $|f'(x)|\le |f(1)|+|f(0)|+|\frac{f''(\xi)}{2}|x^2+|\frac{f''(\eta)}{2}|(1-x)^2$

由$|f(x)|\le A$，$|f''(x)|\le B$，得 $|f'(x)|\le 2A+\frac{B}{2}\left[x^2+(1-x)^2\right]$.

又 $g(x)=x^2+(1-x)^2=2(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$在$[0,1]$上的最大值为1，

所以有 $|f'(x)|\le 2A+\frac{B}{2}$.

四、（14分）



中国大学MOOC

(2014预赛，14分) (1) 设一球缺高为h，所在球的半径为R，证明：该球缺的体积为$\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$，球冠的面积为$2\pi Rh$;

(2) 设球体$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\le 12$被平面$P: x+y+z=6$所截的小球缺为$\Omega$. 记球缺上的球冠为$\Sigma$，方向指向球外，求曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

(1)证明　设球缺所在球表面的方程为$x^2+y^2+z^2=R^2$，球缺的中心线为z轴，记球缺的区域为Ω，则其体积为

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V=\int_{R-h}^{R}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad D_z: x^2+y^2\le R^2-z^2$$

$$=\int_{R-h}^{R}\pi(R^2-z^2)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2.$$

(1) 设一球缺高为h，所在球的半径为R，证明：球冠的面积为$2\pi Rh$;

求球冠面积 设Σ：$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\quad (R-h\le z\le R)$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-2y}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad D_{xy}:\ x^2+y^2\le R^2-(R-h)^2$$

$$S=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{R^2-(R-h)^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}r\mathrm{d}r$$

$$=-2\pi R\cdot\sqrt{R^2-r^2}\Big|_0^{\sqrt{R^2-(R-h)^2}}=2\pi Rh$$

(2) 设球体$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\le 12$被平面$P: x+y+z=6$所截的小球缺为$\Omega$. 记球缺上的球冠为$\Sigma$，方向指向球外，求曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(2)解　记球缺的底面圆为P_1,方向指向球缺外，且记 $J=\iint\limits_{P_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

由高斯公式得$I+J=\iiint\limits_{\Omega} 3\mathrm{d}V=3V(\Omega)$.其中$V(\Omega)$为$\Omega$的体积.

由于平面P的正向单位法向量为$-\frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$，故

$$J=\iint\limits_{P_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{P_1}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{P_1}(x+y+z)\mathrm{d}S=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{P_1}6\mathrm{d}S=-\frac{6}{\sqrt{3}}\sigma(P_1)=-2\sqrt{3}\sigma(P_1)$$

所以 $I=3V(\Omega)-J=3V(\Omega)+2\sqrt{3}\sigma(P_1)$.　　$V(\Omega)=?$　$\sigma(P_1)=?$

(2) 设球体$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\le 12$被平面$P: x+y+z=6$所截的小球缺为$\Omega$. 记球缺上的球冠为$\Sigma$，方向指向球外，求曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

$I=3V(\Omega)+2\sqrt{3}\sigma(P_1)$

由于球缺底面圆心为$Q(2,2,2)$,而球缺的顶点为$D(3,3,3)$,

故球缺的高度$h=|QD|=\sqrt{3}$, 再由(1)代入$h=\sqrt{3}, R=2\sqrt{3}$,

球缺体积:$\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$

$$V(\Omega)=\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2=\frac{\pi}{3}(3\times 2\sqrt{3}-\sqrt{3})(\sqrt{3})^2=5\sqrt{3}\pi,$$

球缺底面半径$\sqrt{R^2-(R-h)^2}=\sqrt{2Rh-h^2}$

$$\sigma(P_1)=\pi(\sqrt{2Rh-h^2})^2=\pi(2Rh-h^2)=\pi[2\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{3}-(\sqrt{3})^2]=9\pi$$

$$\therefore\ I=3\times 5\sqrt{3}\pi+2\sqrt{3}\times 9\pi=33\sqrt{3}\pi$$

五、（15分）



中国大学MOOC

(2014预赛, 15分)

设$f(x)$在$[a,\ b]$上非负连续，严格单增，且存在$x_n \in [a,\ b]$使得

$$[f(x_n)]^n = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^n \mathrm{d}x,\ \text{求}\lim_{n\to\infty} x_n.$$

解　特殊情形：$a=0,\ b=1$. 满足$[f(x_n)]^n = \int_0^1 [f(x)]^n \mathrm{d}x$　下面证明$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$

首先$x_n \in [0,1]$，即$x_n \le 1$, 只要证明$\forall \varepsilon > 0 (<1)$，$\exists N$，当$n > N$时，有$x_n > 1-\varepsilon.$

由$f(x)$在$[0,1]$上严格单增，就是要证明 $[f(1-\varepsilon)]^n < [f(x_n)]^n = \int_0^1 [f(x)]^n \mathrm{d}x.$

由于$\forall c \in (0,1)$，有　$\int_c^1 [f(x)]^n \mathrm{d}x > [f(c)]^n \cdot (1-c).$

取$c = 1-\frac{\varepsilon}{2}$，则$f(1-\varepsilon) < f(1-\frac{\varepsilon}{2}) = f(c)$，即$\frac{f(1-\varepsilon)}{f(c)} < 1,$

设$f(x)$在$[a,\ b]$上非负连续，严格单增，且存在$x_n\in[a,\ b]$使得

$$[f(x_n)]^n=\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n\mathrm{d}x,\ \text{求}\lim_{n\to\infty}x_n.$$

$\dfrac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}<1,$ 于是有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}\right]^n=0.$

由于$\forall c\in(0,1)$，有

$$\int_c^1[f(x)]^n\mathrm{d}x>[f(c)]^n\cdot(1-c).$$

所以$\exists N$，当$n>N$时，有 $\left[\dfrac{f(1-\varepsilon)}{f(c)}\right]^n<\dfrac{\varepsilon}{2}=1-c,$ $\int_0^1[f(x)]^n\mathrm{d}x=[f(x_n)]^n$

即 $[f(1-\varepsilon)]^n<[f(c)]^n(1-c)\le\int_c^1[f(x)]^n\mathrm{d}x\le\int_0^1[f(x)]^n\mathrm{d}x=[f(x_n)]^n,$

从而$1-\varepsilon<x_n$，由ε的任意性得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1.$

设$f(x)$在$[a,\ b]$上非负连续，严格单增，且存在$x_n \in [a,\ b]$使得

$$[f(x_n)]^n = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^n \mathrm{d}x,\ \text{求}\lim_{n\to\infty} x_n.$$

$x_n \in [0,1]$，使$[f(x_n)]^n = \int_0^1 [f(x)]^n \mathrm{d}x$，

则$\lim_{n\to\infty} x_n = 1$

一般情形，令$F(t) = f(a+t(b-a))$，$t \in (0,1)$

由$f(x)$在$[a,\ b]$上非负连续、严格单增，知$F(t)$在$[0,1]$上非负连续、严格单增.

令$x = a+t(b-a)$，　则$x_n = a+t_n(b-a)$，

$[f(x_n)]^n = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^n \mathrm{d}x$化为 $[f(a+t_n(b-a))]^n = \int_0^1 [f(a+t(b-a))]^n \mathrm{d}t.$

即$\exists t_n \in [0,1]$，使$[F(t_n)]^n = \int_0^1 [F(t)]^n \mathrm{d}t$，　　则$\lim_{n\to\infty} t_n = 1$，

故$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}[a+t_n(b-a)] = a+(b-a) = b.$

六、（15分）



中国大学MOOC

(2014预赛, 15分)

设$A_n=\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}n(\dfrac{\pi}{4}-A_n)$.

解　因为$A_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+i^2}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{i^2}{n^2}}$，　令$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\arctan x\,|_0^1=\dfrac{\pi}{4}$.　　记$x_i=\dfrac{i}{n}$，则$x_i-x_{i-1}=\dfrac{1}{n}$，

$$A_n=\frac{1}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right]$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}f(x_1)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}f(x_2)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{x_{n-1}}^{x_n}f(x_n)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x_i)\mathrm{d}x.$$

设$A_n=\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}n(\dfrac{\pi}{4}-A_n)$.

$$A_n=\int_{x_0}^{x_1}f(x_1)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}f(x_2)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{x_{n-1}}^{x_n}f(x_n)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x_i)\mathrm{d}x.$$

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x+\cdots+\int_{x_{n-1}}^{x_n}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\mathrm{d}x$$

令 $J_n=n(\dfrac{\pi}{4}-A_n)=n\sum\limits_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x)-f(x_i)]\mathrm{d}x,$

由拉格朗日中值定理，$\exists\xi_i\in(x_{i-1},\ x_i)$使得 $J_n=n\sum\limits_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(\xi_i)(x-x_i)\mathrm{d}x$

记m_i，M_i分别是$f'(x)$在$[x_{i-1},\ x_i]$上的最小值和最大值，则$m_i\le f'(\xi_i)\le M_i$，

$$m_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\mathrm{d}x\le\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(\xi_i)(x-x_i)\mathrm{d}x\le M_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\mathrm{d}x$$

设$A_n=\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}n(\dfrac{\pi}{4}-A_n)$.

$$m_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\mathrm{d}x\le\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(\xi_i)(x-x_i)\mathrm{d}x\le M_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\mathrm{d}x$$

$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

所以$\exists\eta_i\in(x_{i-1},\ x_i)$，使得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(\xi_i)(x-x_i)\mathrm{d}x=f'(\eta_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\mathrm{d}x$$

$$=f'(\eta_i)\frac{(x-x_i)^2}{2}\Big|_{x_{i-1}}^{x_i}=-f'(\eta_i)\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2}.$$

于是，有$J_n=-\dfrac{n}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}f'(\eta_i)(x_i-x_{i-1})^2=-\dfrac{n}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}f'(\eta_i)\dfrac{1}{n^2}=-\dfrac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}f'(\eta_i).$

从而$\lim\limits_{n\to\infty}n(\dfrac{\pi}{4}-A_n)=\lim\limits_{n\to\infty}J_n=-\dfrac{1}{2}\int_0^1f'(x)\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}[f(1)-f(0)]=\dfrac{1}{4}.$

END



中国大学MOOC