全国大学生
数学竞赛



第5届决赛

中国大学MOOC

一、解答下列各题

(本题共4个小题，每小题7分，共28分)

(要求写出重要步骤)

第1题

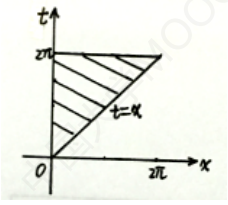


中国大学MOOC

(2014决赛,7分)计算积分 $\int_0^{2\pi} x \int_x^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x.$

计算 $\int_0^{2\pi} x\mathrm{d}x \int_x^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$

解法1 交换积分次序



$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t\int_0^{t} x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$$

解法2 使用分部积分公式

$$\text{令}f(x)=\int_x^{2\pi}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t,\ \text{则}f'(x)=-\frac{\sin^2 x}{x^2},\ \text{且}f(2\pi)=0.$$

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi} xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}x^2 f(x)\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x^2 f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x^2\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

一、解答下列各题

(本题共4个小题，每小题7分，共28分)

(要求写出重要步骤)

第2题



中国大学MOOC

(2014决赛,7分)

设$f(x)$是$[0,1]$上的连续函数，且满足$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$,求一个这样的函数$f(x)$使得积分$I=\int_0^1(1+x^2)f^2(x)\mathrm{d}x$取得最小值.

解 $1=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\sqrt{1+x^2}\,f(x)\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

$$\le\left[\int_0^1(1+x^2)f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$$

柯西不等式　设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则

$$\left[\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x\right]^2\le\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]\cdot\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]$$

设$f(x)$是$[0,1]$上的连续函数，且满足$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$,求一个这样的函数$f(x)$使得积分$I=\int_0^1(1+x^2)f^2(x)\mathrm{d}x$取得最小值.

$$1\le\left[\int_0^1(1+x^2)f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\int_0^1(1+x^2)f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(\frac{\pi}{4})^{\frac{1}{2}},\qquad \text{故}\quad \int_0^1(1+x^2)f^2(x)\mathrm{d}x\ge\frac{4}{\pi}.$$

取$f(x)=\dfrac{4}{\pi(1+x^2)}$，则 $\int_0^1(1+x^2)\dfrac{4^2}{\pi^2(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{4}{\pi}\mathrm{d}x=\dfrac{4}{\pi}$

一、解答下列各题

(本题共4个小题，每小题7分，共28分)

(要求写出重要步骤)

第3题



中国大学MOOC

6.(2014决赛,7分) 设$F(x,y,z)$和$G(x,y,z)$有连续偏导数,$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\neq 0$,

曲线$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$过点$P_0(x_0,y_0,z_0)$. 记$\Gamma$在$xOy$平面上的投影曲线为$S$,

求S上过点(x_0,y_0)的切线方程.

解 由两方程定义的曲面在$P_0(x_0,y_0,z_0)$的切面分别为

$$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0,$$

$$G_x(P_0)(x-x_0)+G_y(P_0)(y-y_0)+G_z(P_0)(z-z_0)=0.$$

上述两切面的交线就是Γ在P_0点的切线，该切线在xOy面上的投影就是S过$(x_0,\ y_0)$的切线，消去$z-z_0$得$(F_xG_z-G_xF_z)_{P_0}(x-x_0)+(F_yG_z-G_yF_z)_{P_0}(y-y_0)=0$,

这里$x-x_0$的系数是$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\neq 0$,故上式是一条直线的方程，就是所要求的切线.

一、解答下列各题

(本题共4个小题，每小题7分，共28分)

(要求写出重要步骤)

第4题



中国大学MOOC

(2014决赛,7分)

设矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & a\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$，其中$a$为常数，矩阵$B$满足关系式$AB=A-B+E$，其中$E$是单位矩阵且$B\neq E$. 若秩$\mathrm{rank}(A+B)=3$，试求常数$a$的值.

解 由关系式$\boldsymbol{AB=A-B+E}$，得$(\boldsymbol{A+E})(\boldsymbol{B-E})=0$.

从而得 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A+B})\leq \mathrm{rank}(\boldsymbol{A+E})+\mathrm{rank}(\boldsymbol{B-E})\leq 3$.

因为$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A+B})=3$，所以$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A+E})+\mathrm{rank}(\boldsymbol{B-E})=3$.

又$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A+E})\geq 2$，考虑到$\boldsymbol{B\neq E}$，所以$\mathrm{rank}(\boldsymbol{B-E})\geq 1$.

故只有$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A+E})=2$.

$$A+E=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 3 & 5 & a\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

设矩阵$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 4 & a\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$，其中$a$为常数，矩阵$B$满足关系式$AB=A-B+E$，其中$E$是单位矩阵且$B\neq E$. 若秩$\mathrm{rank}(A+B)=3$，试求常数$a$的值.

故只有$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A+E})=2$.

$$\boldsymbol{A+E}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{2} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{5} & \boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{3}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{3}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{-5}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{a-9}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{3}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{a-9}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{13-2a}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{2(a-9)=-5}\ \Rightarrow \boldsymbol{a=\frac{13}{2}}.$$

二、（12分）



中国大学MOOC

(2014决赛,12分) 设 $f \in C^4(-\infty,+\infty)$，$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2$，其中$\theta$是与$x,h$无关的常数，证明$f$是不超过3次的多项式.

证　已知 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2$　　①

由泰勒公式 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\frac{1}{6}f'''(x)h^3+\frac{1}{24}f^{(4)}(\xi)h^4$　②

ξ介于x与$x+h$之间，

由泰勒公式 $f''(x+h)=f''(x)+f'''(x)h+\frac{1}{2}f^{(4)}(\eta)h^2$，$\eta$介于$x$与$x+\theta h$之间

得　$f''(x+\theta h)=f''(x)+f'''(x)\theta h+\frac{1}{2}f^{(4)}(\eta)\theta^2h^2$，　③

设 $f \in C^4(-\infty,+\infty)$, $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2$,
其中θ是与x,h无关的常数，证明f是不超过3次的多项式.

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2 \qquad ①$$

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\frac{1}{6}f'''(x)h^3+\frac{1}{24}f^{(4)}(\xi)h^4 \qquad ②$$

$$f''(x+\theta h)=f''(x)+f'''(x)\theta h+\frac{1}{2}f^{(4)}(\eta)\theta^2h^2, \qquad ③$$

由①、②得 $\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2=\frac{1}{2}f''(x)h^2+\frac{1}{6}f'''(x)h^3+\frac{1}{24}f^{(4)}(\xi)h^4$ ④

③代入④得 $4(1-3\theta)f'''(x)=\left[6f^{(4)}(\eta)\theta^2-f^{(4)}(\xi)\right]h.$

设 $f \in C^4(-\infty,+\infty)$, $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2$,
其中θ是与x,h无关的常数，证明f是不超过3次的多项式.

$$4(1-3\theta)f'''(x)=\left[6f^{(4)}(\eta)\theta^2-f^{(4)}(\xi)\right]h.$$

当$\theta\neq\frac{1}{3}$时，$f'''(x)=\dfrac{6f^{(4)}(\eta)\theta^2-f^{(4)}(\xi)}{4(1-3\theta)}h$,

令$h\to 0$得$f'''(x)=0$, 此时f是不超过二次的多项式;

当$\theta=\frac{1}{3}$时，有$\frac{2}{3}f^{(4)}(\eta)=f^{(4)}(\xi)$.

令$h\to 0$，注意到$\xi\to x$，$\eta\to x$，有$f^{(4)}(x)=0$,

从而f是不超过三次的多项式.

三、（12分）



中国大学MOOC

(2014决赛,12分)

设当 $x>-1$ 时，可微函数 $f(x)$ 满足条件 $f'(x)+f(x)-\dfrac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0,$ 且 $f(0)=1,$ 试证：当 $x\geq 0$ 时，有 $\mathrm{e}^{-x}\leq f(x)\leq 1$ 成立.

证　由题设知 $f'(0)=-1,$

所给方程可变形为 $(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0.$

两端对 x 求导并整理得 $(x+1)f''(x)+(x+2)f'(x)=0,$　令 $f'(x)=p(x),$

则 $(x+1)p'(x)+(x+2)p(x)=0,$　分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=-\dfrac{x+2}{x+1}\mathrm{d}x$

即 $\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=(-1-\dfrac{1}{x+1})\mathrm{d}x,$　积分得 $\ln p=-x-\ln(x+1)+\ln C,$

设当$x>-1$时，可微函数$f(x)$满足条件$f'(x)+f(x)-\dfrac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$，且$f(0)=1$，试证：当$x\geq 0$时，有$\mathrm{e}^{-x}\leq f(x)\leq 1$成立.

整理得 $p=\dfrac{C\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$，即 $f'(x)=\dfrac{C\mathrm{e}^{-x}}{x+1}$.

$\ln p=-x-\ln(x+1)+\ln C,$

由 $f'(0)=-1$ 得 $C=-1$，故 $f'(x)=-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x+1}<0, x>-1$　可见$f(x)$单减.

而 $f(0)=1$，所以当 $x\geq 0$ 时，有 $f(x)\leq 1$.

下证 $f(x)\geq \mathrm{e}^{-x}$　对 $f'(t)=-\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t+1}<0$ 在 $[0,\ x]$ 上进行积分得

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=-\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t+1}\mathrm{d}t\geq-\int_0^x\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-x}-1 \qquad f(0)=1$$

所以 $f(x)=1+(\mathrm{e}^{-x}-1)\geq \mathrm{e}^{-x}$.

四、（10分）



中国大学MOOC

(2014决赛,10分)设 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$，$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中函数$f(x,y)$在D上有连续的二阶偏导数.

若对任何 x，y 有 $f(0,y)=f(x,0)=0$，且$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\le A$. 证明：$I\le\dfrac{A}{4}$.

证 $I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x=-\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}(1-x)$

由分部积分法可得

$$\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}(1-x)=\left[f(x,y)(1-x)\right]\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1(1-x)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x=-\int_0^1(1-x)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x.$$

$$\therefore\quad I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1(1-x)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x$$

交换积分次序后可得 $I=\int_0^1(1-x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}y$.

设 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$，$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中函数$f(x,y)$在$D$上有连续的二阶偏导数. 若对任何 x，y 有 $f(0,y)=f(x,0)=0$且$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\le A$. 证明：$I\le\dfrac{A}{4}$.

交换积分次序后可得 $I=\int_0^1(1-x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}y.$

因为 $f(x,\,0)=0$，所以 $\dfrac{\partial f(x,\,0)}{\partial x}=0$，从而 $(1-y)\left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{y=0}^{y=1}=0$，

再由分部积分法得

$$\int_0^1\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}y=-\int_0^1\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}(1-y)=-\left[(1-y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Big|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1(1-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,\mathrm{d}y\right]$$

$$=\int_0^1(1-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,\mathrm{d}y$$

设 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$，$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中函数$f(x,y)$在$D$上有连续的二阶偏导数. 若对任何 x，y 有 $f(0,y)=f(x,0)=0$且$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\le A$. 证明：$I\le\dfrac{A}{4}$.

$$I=\int_0^1(1-x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}y.$$

$$\int_0^1\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}y=\int_0^1(1-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,\mathrm{d}y$$

故 $$I=\int_0^1(1-x)\,\mathrm{d}x\int_0^1(1-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}y=\iint\limits_D(1-x)(1-y)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\le A$,且 $(1-x)(1-y)$ 在D上非负，

故 $$I\le A\iint\limits_D(1-x)(1-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A\int_0^1(1-x)\,\mathrm{d}x\int_0^1(1-y)\,\mathrm{d}y=\frac{A}{4}.$$

五、（12分）



中国大学MOOC

(2014决赛,12分) 设函数$f(x)$具有一阶连续导数，$P=Q=R=f((x^2+y^2)z)$，有向曲面Σ_t是圆柱体$x^2+y^2\le t^2, 0\le z\le 1$的表面，方向朝外. 记第二型的曲面积分 $I_t=\iint\limits_{\Sigma_t} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 求极限$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{I_t}{t^4}$.

解 由高斯公式得

$$I_t=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}(2xz+2yz+x^2+y^2)f'((x^2+y^2)z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

由对称性得$\iiint\limits_{\Omega}(2xz+2yz)f'((x^2+y^2)z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$

$$I_t=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)f'((x^2+y^2)z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t\mathrm{d}r\int_0^1 f'(r^2z)r^3\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^t\left[\int_0^1 f'(r^2z)r^3\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}r$$

(2014决赛,12分) 设函数$f(x)$具有一阶连续导数，$P=Q=R=f((x^2+y^2)z)$，有向曲面Σ_t是圆柱体$x^2+y^2\le t^2, 0\le z\le 1$的表面，方向朝外. 记第二型的曲面积分 $I_t=\iint\limits_{\Sigma_t} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 求极限$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{I_t}{t^4}$.

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{I_t}{t^4}=\lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi\int_0^t\left[\int_0^1 f'(r^2z)r^3\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}r}{t^4}=\lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi\int_0^1 f'(t^2z)t^3\mathrm{d}z}{4t^3}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{2\pi t^3\int_0^1 f'(t^2z)\mathrm{d}z}{4t^3}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\pi}{2}\int_0^1 f'(t^2z)\mathrm{d}z=\lim_{t\to 0^+}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{t^2}\int_0^1 f'(t^2z)\mathrm{d}(t^2z)$$

$$=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^2}\cdot f(t^2z)\Big|_{z=0}^{z=1}=\frac{\pi}{2}\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t^2)-f(0)}{t^2}=\frac{\pi}{2}f'(0).$$

六、（12分）



中国大学MOOC

(2014决赛,12分)

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$为两个n阶正定矩阵，求证$\boldsymbol{AB}$正定的充要条件是$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

证　必要性　设$\boldsymbol{AB}$为两个n阶正定矩阵，从而为对称矩阵，即$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{AB}$.

又$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$，所以$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}$，故$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

充分性　因为$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{AB}$，所以$\boldsymbol{AB}$为实对称矩阵.

因为$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$正定矩阵，存在可逆阵$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$，

于是$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}$.

所以$(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{ABP}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{PQ}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QP}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{QP}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{QP}^{\mathrm{T}})$,即$(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{ABP}^{\mathrm{T}}$是正定矩阵.

从而矩阵$(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{ABP}^{\mathrm{T}}$的特征值为正实数，而$\boldsymbol{AB}$相似于$(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{ABP}^{\mathrm{T}}$，

故$\boldsymbol{AB}$的特征值全为正实数.于是得$\boldsymbol{AB}$为正定矩阵.

七、（12分）



中国大学MOOC

(2014决赛,12分)

假设$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径为1,$\lim_{n\to\infty}na_n=0$,且$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=A$.证明$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$收敛且$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=A$

证　由$\lim_{n\to\infty}na_n=0$知$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}k|a_k|}{n}=0$，故对于任意$\varepsilon>0$存在$N_1$使得当$n>N_1$时，

有 $n|a_n|<\frac{\varepsilon}{3}$，$0\le\frac{\sum_{k=0}^{n}k|a_k|}{n}<\frac{\varepsilon}{3}$.

又因为$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=A$，所以存在$\delta>0$，当$1-\delta<x<1$时，有$\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n-A\right|<\frac{\varepsilon}{3}$.

取N_2，当$n>N_2$时，$\frac{1}{n}<\delta$，从而$1-\delta<1-\frac{1}{n}$，

取$x=1-\frac{1}{n}$，则 $\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-A\right|<\frac{\varepsilon}{3}$.

假设$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为1,$\lim_{n\to\infty}na_n=0$,且$\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=A$.证明$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$收敛且$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=A$

取$N=\max\{N_1,\ N_2\}$，当$n>N$时，

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n-A\right|=\left|\sum_{k=0}^{n}a_k-\sum_{k=0}^{n}a_kx^k-\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kx^k+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k-A\right|$$

$$\le\left|\sum_{k=0}^{n}a_k(1-x^k)\right|+\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kx^k\right|+\left|\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k-A\right|.$$

取$x=1-\frac{1}{n}$，则

$$\left|\sum_{k=0}^{n}a_k(1-x^k)\right|=\sum_{k=0}^{n}a_k(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1})\le\sum_{k=0}^{n}|a_k|(1-x)k=\frac{\sum_{k=0}^{n}k|a_k|}{n}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

假设$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径为1, $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, 且$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = A$. 证明$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$收敛且$\sum_{n=0}^{\infty}a_n = A$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n - A\right| \le \left|\sum_{k=0}^{n}a_k(1-x^k)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k x^k\right| + \left|\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k - A\right|$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n}a_k(1-x^k)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k x^k\right| \le \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}k|a_k|x^k < \frac{\varepsilon}{3n}\sum_{k=n+1}^{\infty}x^k \le \frac{\varepsilon}{3n}\cdot\frac{1}{1-x} = \frac{\varepsilon}{3n\cdot\frac{1}{n}} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

又因为$\left|\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k - A\right| < \frac{\varepsilon}{3}$, 则$\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n - A\right| < 3\cdot\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$

END



中国大学MOOC