全国大学生
数学竞赛



第5届预赛

中国大学MOOC

一、解答下列各题

(本题共4个小题，每小题6分，共24分)

(要求写出重要步骤)

第1题



中国大学MOOC

(2013预赛,6分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2})^n$.

解 因为 $\sin\pi\sqrt{1+4n^2}=\sin(\pi\sqrt{1+4n^2}-2n\pi)=\sin\dfrac{\pi}{2n+\sqrt{1+4n^2}}$.

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}(1+\sin\frac{\pi}{2n+\sqrt{1+4n^2}})^n$$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\ln(1+\sin\frac{\pi}{2n+\sqrt{1+4n^2}})\right]$$

当 $u\to 0$ 时， $\ln(1+u)\sim u$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{2n+\sqrt{1+4n^2}}\right]$$

当 $u\to 0$ 时， $\sin u\sim u$

$$=\exp(\lim_{n\to\infty}\frac{n\pi}{2n+\sqrt{1+4n^2}})=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}.$$

一、解答下列各题

(本题共4个小题，每小题6分，共24分)

(要求写出重要步骤)

第2题



中国大学MOOC

(2013预赛,6分) 证明广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$不是绝对收敛的.

证 记$a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$，只要证明$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$发散.

因为 $a_n\geq\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x=\frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=\frac{2}{(n+1)\pi}$

而$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(n+1)\pi}$发散，故$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$发散.

从而广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$不是绝对收敛的.

一、解答下列各题

(本题共4个小题，每小题6分，共24分)

(要求写出重要步骤)

第3题



中国大学MOOC

(2013预赛,6分) 设函数$y=y(x)$由$x^3+3x^2y-2y^3=2$所确定，求$y(x)$的极值.

解 方程两边对x求导，得 $3x^2+6xy+3x^2y'-6y^2y'=0.$

故$y'=\dfrac{x(x+2y)}{2y^2-x^2}$，令$y'=0$，得$x(x+2y)=0\Rightarrow x=0$或$x=-2y.$

将$x=0$代入所给方程，得 $\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$ 将$x=-2y$代入所给方程，得 $\begin{cases}x=-2,\\y=1.\end{cases}$

又 $y''=\dfrac{(2y^2-x^2)(2x+2xy'+2y)-(x^2+2xy)(4yy'-2x)}{(2y^2-x^2)^2}$,

$y''\big|_{\substack{x=0\\y=-1\\y'=0}}=-1<0$, $y''\Big|_{\substack{x=-2\\y=1\\y'=0}}>0.$ 故$y(0)=-1$为极大值，$y(-2)=1$为极小值.

一、解答下列各题

(本题共4个小题，每小题6分，共24分)

(要求写出重要步骤)

第4题



中国大学MOOC

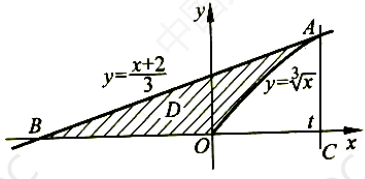
(2013预赛,6分)

过曲线$y=\sqrt[3]{x}(x\geq 0)$上的点A作切线，使该切线与曲线及x轴所围成的平面图形的面积为$\frac{3}{4}$，求A点的坐标.

解 设切点A的坐标为$(t,\sqrt[3]{t})$，$y'|_{x=t}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}|_{x=t}=\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}$

曲线过A点的切线方程为 $y-\sqrt[3]{t}=\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}(x-t)$,

令$y=0$，可得切线与x轴交点B的横坐标$x_0=-2t$,



设A在x轴上的投影点为C，$S=\frac{1}{2}\sqrt[3]{t}\cdot[t-(-2t)]-\int_0^t\sqrt[3]{x}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}t\sqrt[3]{t}$

$\frac{3}{4}t\sqrt[3]{t}=\frac{3}{4}\quad\Rightarrow t=1.$ 故A的坐标为(1,1).

二、（12分）



(2013预赛,12分) 计算定积分$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^{x}}{1+\cos^{2}x}dx.$

解 $I=\int_{-\pi}^{0}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^{x}}{1+\cos^{2}x}dx+\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^{x}}{1+\cos^{2}x}dx=I_1+I_2$

$I_1=-\int_{\pi}^{0}\frac{(-t)\sin(-t)\cdot\arctan e^{-t}}{1+\cos^{2}(-t)}dt$ 令$x=-t$

$=\int_{0}^{\pi}\frac{t\sin t\cdot\arctan e^{-t}}{1+\cos^{2}t}dt=\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^{2}x}\arctan e^{-x}dx$

$I_2=\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^{2}x}\arctan e^{x}dx$ $\therefore I=\int_{0}^{\pi}(\arctan e^{x}+\arctan e^{-x})\frac{x\sin x}{1+\cos^{2}x}dx$

计算定积分 $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^{x}}{1+\cos^{2}x}dx.$

$$I=\int_{0}^{\pi}(\arctan e^{x}+\arctan e^{-x})\frac{x\sin x}{1+\cos^{2}x}dx$$

理由如下　　设 $f(x)=\arctan e^{x}+\arctan e^{-x}$,

$$=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^{2}x}dx$$

则 $f'(x)=\frac{e^{x}}{1+e^{2x}}+\frac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}}=\frac{e^{x}}{1+e^{2x}}-\frac{e^{x}}{1+e^{2x}}=0$

所以 $f(x)=C$,　　令 $x=0$, 得 $C=\frac{\pi}{2}$.　　故 $f(x)=\frac{\pi}{2}$

$$I=\int_{0}^{\pi}(\arctan e^{x}+\arctan e^{-x})\frac{x\sin x}{1+\cos^{2}x}dx=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^{2}x}dx$$

广义积分中值定理　设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)>0$,

则存在 $\xi\in[a,b]$, 使得 $\int_{a}^{b}f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_{a}^{b}g(x)dx$

计算定积分 $I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^{x}}{1+\cos^{2}x}\mathrm{d}x.$

设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，则 $\int_0^{\pi}xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)\mathrm{d}x$

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^{2}x}\mathrm{d}x=\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^{2}x}\mathrm{d}x$$

$$=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2}\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^{3}}{8}.$$

设$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，证明：$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$

证　设$x = \pi - t$，则$\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$，

$$\text{左端} = -\int_{\pi}^{0} (\pi - t) f[\sin(\pi - t)]\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \pi f(\sin t)\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} tf(\sin t)\mathrm{d}t$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x \qquad 2\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$$

故$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$

设$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，证明：$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x$

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{1+\cos^2 x} = -\frac{\pi}{2}\left[\arctan(\cos x)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi^2}{4}.$$

三、（12分）



(2013预赛,12分)

设函数$f(x)$在$x=0$处存在二阶导数$f''(0)$，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f(\dfrac{1}{n})\right|$收敛.

证 由于$f(x)$在$x=0$处连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，则

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0,\qquad f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{1}{2}f''(0)$$

所以 $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{\left|f(\dfrac{1}{n})\right|}{\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{1}{2}|f''(0)|$.　由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f(\dfrac{1}{n})\right|$收敛.

四、（10分）



(2013预赛,10分)

设$|f(x)|\le\pi$，$f'(x)\ge m>0(a\le x\le b)$，证明$\left|\int_a^b \sin f(x)\mathrm{d}x\right|\le\frac{2}{m}$.

证法1 $\left|\int_a^b \sin f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^b \frac{f'(x)\sin f(x)}{f'(x)}\mathrm{d}x\right| \le\frac{1}{m}\left|\int_a^b \sin f(x)\mathrm{d}f(x)\right|$

$$=\frac{1}{m}\left|\left[-\cos f(x)\right]_a^b\right|=\frac{1}{m}\left|\cos f(a)-\cos f(b)\right|$$

$$\le\frac{2}{m}.$$

设$|f(x)|\le\pi$，$f'(x)\ge m>0\ (a\le x\le b)$，证明$\left|\int_a^b \sin f(x)\mathrm{d}x\right|\le\frac{2}{m}.$

证法2　因为$f'(x)\ge m>0\ \ (a\le x\le b)$，所以$f(x)$在$[a,b]$上严格单增，从而有反函数.

设$A=f(a)$，$B=f(b)$，φ是f的反函数，则 $0<\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}\le\dfrac{1}{m}$，

又$|f(x)|\le\pi$，则$-\pi\le A<B\le\pi.$

所以 $\left|\int_a^b \sin f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_A^B \varphi'(y)\sin y\mathrm{d}y\right|$　　令$x=\varphi(y)$

$$\le\int_0^{\pi}\frac{1}{m}\sin y\mathrm{d}y=\frac{2}{m}.$$

五、（14分）



(2013预赛，14分) 设Σ是一个光滑封闭曲面，方向朝外. 给定第二型曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^3-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2y^3-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(3z^3-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

试确定曲面Σ，使得积分I的值最小，并求该最小值.

解　记∑围成的立体为Ω，由高斯公式，

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(3x^2+6y^2+9z^2-3)\mathrm{d}V=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+2y^2+3z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

为了使I达到最小，就要求Ω是使得$x^2+2y^2+3z^2-1\le 0$的最大空间区域，

即 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+2y^2+3z^2\le 1\right\}$.

所以Ω是一个椭球，∑是椭球Ω的表面时，积分I最小.

(2013预赛，14分) 设Σ是一个光滑封闭曲面，方向朝外. 给定第二型曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}(x^3-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2y^3-y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(3z^3-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

试确定曲面Σ，使得积分I的值最小，并求该最小值.

$$I_{\min}=3\iiint_{\Omega}(x^2+2y^2+3z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad \Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+2y^2+3z^2\le 1\right\}.$$

做变换 $\begin{cases}x=u\\ y=\dfrac{v}{\sqrt{2}}\\ z=\dfrac{w}{\sqrt{3}}\end{cases}$，则 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

$$\begin{aligned}I_{\min}&=\frac{3}{\sqrt{6}}\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1}(u^2+v^2+w^2-1)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\&=\frac{3}{\sqrt{6}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1(r^2-1)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\\&=-\frac{4\sqrt{6}}{15}\pi.\end{aligned}$$

六、（14分）



(2013预赛, 14分) 设$I_a(r)=\int_C \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^a}$，其中$a$为常数，

曲线C为椭圆$x^2+xy+y^2=r^2$，取正向，求极限$\lim\limits_{r\to+\infty} I_a(r)$.

解　作变换 $\begin{cases} x=\dfrac{u-v}{\sqrt{2}} \\ y=\dfrac{u+v}{\sqrt{2}} \end{cases}$,

曲线C变为uOv平面上的曲线$\Gamma:\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}v^2=r^2$,也是取正向，

且有$x^2+y^2=u^2+v^2, y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v,$

从而　$I_a(r)=\int_\Gamma \frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{(u^2+v^2)^a}.$

(2013预赛, 14分) 设$I_a(r)=\int_C \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^a}$，其中$a$为常数，曲线$C$为椭圆$x^2+xy+y^2=r^2$，取正向，求极限$\lim\limits_{r\to+\infty} I_a(r)$.

作变换 $\begin{cases} u=\sqrt{\frac{2}{3}}\, r\cos\theta \\ v=\sqrt{2}\, r\sin\theta \end{cases}$，则有$v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^2\mathrm{d}\theta$,

$\Gamma:\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}v^2=r^2$,正向，

$I_a(r)=\int_\Gamma \frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{(u^2+v^2)^a}$.

$$I_a(r)=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^{2(1-a)}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta)^a}=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^{2(1-a)}J_a,$$

其中$J_a=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta)^a}$　$0<J_a<+\infty$.

因此当$a>1$和$a<1$时，所求极限分别为0和$-\infty$.

(2013预赛, 14分) 设$I_a(r)=\int_C \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^a}$，其中$a$为常数，曲线$C$为椭圆$x^2+xy+y^2=r^2$，取正向，求极限$\lim\limits_{r\to+\infty} I_a(r)$.

$$I_a(r)=-\frac{2}{\sqrt{3}}r^{2(1-a)}J_a$$

而当$a=1$时，

$$J_1=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\frac{2}{3}\cos^2\theta+2\sin^2\theta}$$

$$\int\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\tan\theta}{\frac{2}{3}+2\tan^2\theta}=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2+t^2}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}}\arctan\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{3}}\Big|_0^{+\infty}=\sqrt{3}\pi.$$

故所求极限为 $\lim\limits_{t\to+\infty} I_a(r)=\begin{cases}0, & a>1,\\ -\infty, & a<1,\\ -2\pi, & a=1.\end{cases}$

七、（14分）



(2013预赛,14分)

判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$的敛散性，若收敛，求其和.

解　记$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，$u_n=\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$，$n=1,2,3\cdots$.

因为n充分大时，$0<a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=1+\ln n<\sqrt{n}$

$$\int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$>\int_1^2\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{3}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^n\frac{1}{n}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$\int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x>\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\ln n}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{2}=+\infty$$

判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$的敛散性，若收敛，求其和.

$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，$u_n=\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$，$n=1,2,3\cdots$.

因为n充分大时，

$$0<a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\int_1^n\frac{1}{x}\mathrm{d}x=1+\ln n<\sqrt{n},$$

所以$u_n\le\frac{\sqrt{n}}{(n+1)(n+2)}<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，　　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛

根据正项级数比较审敛法知$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$的敛散性，若收敛，求其和.

下面求和 $a_k=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\quad(k=1,2,3\cdots)$，$a_k-a_{k-1}=\frac{1}{k}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}(\frac{a_k}{k+1}-\frac{a_k}{k+2})$$

$$=(\frac{a_1}{2}-\frac{a_1}{3})+(\frac{a_2}{3}-\frac{a_2}{4})+\cdots+(\frac{a_{n-1}}{n}-\frac{a_{n-1}}{n+1})+(\frac{a_n}{n+1}-\frac{a_n}{n+2})$$

$$=\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{3}(a_2-a_1)+\frac{1}{4}(a_3-a_2)+\cdots+\frac{1}{n+1}(a_n-a_{n-1})-\frac{1}{n+2}a_n$$

$$=\left[\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]-\frac{1}{n+2}a_n=1-\frac{1}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}.$$

判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$的敛散性，若收敛，求其和.

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}.$$

因为$0<a_n<1+\ln n$，所以$0<\frac{a_n}{n+2}<\frac{1+\ln n}{n+2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\ln n}{n+2}=0,$　　故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n+2}=0.$

于是$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}-\frac{a_n}{n+2}\right)=1-0-0=1.$

END



中国大学MOOC