全国大学生
数学竞赛



第4届决赛

中国大学MOOC

一、简答下列各题

(本题共5个小题，每小题5分，共25分)

第1题



中国大学MOOC

(2013决赛,5分) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln(\dfrac{\ln ax}{\ln\dfrac{x}{a}})\right](a>1)$.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln(\dfrac{\ln ax}{\ln\dfrac{x}{a}})\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln(\dfrac{\ln x+\ln a}{\ln x-\ln a})\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln(1+\dfrac{2\ln a}{\ln x-\ln a})\right]=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(1+\dfrac{2\ln a}{\ln x-\ln a})^{\ln(x\ln a)}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(1+\dfrac{2\ln a}{\ln x-\ln a})^{\ln x+\ln\ln a}=\ln\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\dfrac{2\ln a}{\ln x-\ln a})^{\ln x+\ln\ln a}$

求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln\dfrac{x}{a}}\right)\right](a>1).$

$$=\ln\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{2\ln a}{\ln x-\ln a}\right)^{\ln x+\ln\ln a}$$

$$=\ln\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{2\ln a}{\ln x-\ln a}\right)^{\frac{\ln x-\ln a}{2\ln a}\cdot 2\ln a\cdot\frac{\ln x+\ln(\ln a)}{\ln x-\ln a}}$$

$$=\ln\left[\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{2\ln a}{\ln x-\ln a}\right)^{\frac{\ln x-\ln a}{2\ln a}}\right]^{2\ln a\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x+\ln(\ln a)}{\ln x-\ln a}}$$

$$\lim\left[f(x)^{g(x)}\right]=\left[\lim f(x)\right]^{\lim g(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\ln e^{\ln a^2}=2\ln a.$$

一、简答下列各题

(本题共5个小题，每小题5分，共25分)

第2题



中国大学MOOC

2.(2013决赛,5分) 设$f(u,v)$具有连续偏导数，且满足$f_u(u,v)+f_v(u,v)=uv$，求$y(x)=\mathrm{e}^{-2x}f(x,x)$所满足的一阶微分方程，并求其通解.

解　$y'=-2\mathrm{e}^{-2x}f(x,x)+\mathrm{e}^{-2x}\left[f_u(x,x)+f_v(x,x)\right]=-2y+x^2\mathrm{e}^{-2x}$,

因此，所求的一阶微分方程为　$y'+2y=x^2\mathrm{e}^{-2x}$,

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$通解：$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$

解得　$y=\mathrm{e}^{-\int 2\mathrm{d}x}\left(\int x^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{e}^{\int 2\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$

$=\mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{x^3}{3}+C\right)$,　C为任意常数.

一、简答下列各题

(本题共5个小题，每小题5分，共25分)

第3题



中国大学MOOC

(2013决赛,5分)

求在$[0,+\infty)$上的可微函数$f(x)$，使$f(x)=\mathrm{e}^{-u(x)}$，其中$u=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

解 由题意 $\mathrm{e}^{-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}=f(x)$，　即 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=-\ln f(x)$,

求导得 $f(x)=-\dfrac{f'(x)}{f(x)}$　　整理得 $f'(x)=-f^2(x)$，并且$f(0)=\mathrm{e}^0=1$.

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-y^2$，　分离变量得$-\dfrac{\mathrm{d}y}{y^2}=\mathrm{d}x$，　积分得$\dfrac{1}{y}=x+C$

把$f(0)=1$代入得$C=1$,　　由此可得 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

一、简答下列各题

(本题共5个小题，每小题5分，共25分)

第4题



中国大学MOOC

(2013决赛,5分) 计算不定积分$\int x\arctan x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$..

解 $\int x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)\mathrm{d}(1+x^2)$

$$=\frac{1}{2}\left[(1+x^2)\ln(1+x^2)-\int(1+x^2)\cdot\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x\right]+C=\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x^2+C.$$

则原式$=\int\arctan x\mathrm{d}\left[\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x^2\right]$

$$=\left[\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x^2\right]\arctan x-\frac{1}{2}\int\left[\ln(1+x^2)-\frac{x^2}{1+x^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x^2\right]\arctan x-\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x$$

计算不定积分 $\int x\arctan x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x.$

$$=\left[\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x^2\right]\arctan x-\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int(1-\frac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{1}{2}(1+x^2)\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}x^2\right]\arctan x-\frac{1}{2}\left[x\ln(1+x^2)-\int\frac{2x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x\right]$$

$$+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\arctan x$$

$$=\frac{1}{2}\arctan x\left[(1+x^2)\ln(1+x^2)-x^2-3\right]-\frac{x}{2}\ln(1+x^2)+\frac{3}{2}x+C.$$

一、填空题

本题满分30分，每小题6分

第5题



中国大学MOOC

4.(2013决赛,5分) 过直线$\begin{cases}10x+2y-2z=27\\x+y-z=0\end{cases}$作曲面$3x^2+y^2-z^2=27$的切平面，求此切平面的方程

解　设$F(x,y,z)=3x^2+y^2-z^2-27$,

则曲面的法向量为　$\overrightarrow{n_1}=\{F_x,F_y,F_z\}=2\{3x,y,-z\}$

过直线$\begin{cases}10x+2y-2z=27\\x+y-z=0\end{cases}$的平面束方程为

$10x+2y+-2z-27+\lambda(x+y-z)=0$

即　$(10+\lambda)x+(2+\lambda)y-(2+\lambda)z-27=0.$

其法向量为　$\overrightarrow{n_2}=\{10+\lambda,\ 2+\lambda,-(2+\lambda)\}.$

(2013决赛,5分) 过直线$\begin{cases}10x+2y-2z=27\\ x+y-z=0\end{cases}$作曲面$3x^2+y^2-z^2=27$的切平面，求此切平面的方程

设所求切点为$P(x_0,y_0,z_0)$，则 $\begin{cases}\dfrac{10+\lambda}{3x_0}=\dfrac{2+\lambda}{y_0}=\dfrac{2+\lambda}{z_0}\\ 3x_0^2+y_0^2-z_0^2=27\\ (10+\lambda)x_0+(2+\lambda)y_0-(2+\lambda)z_0-27=0\end{cases}$

解得$x_0=3$，$y_0=1$，$z_0=1$，$\lambda=-1$，或者$x_0=-3$，$y_0=-17$，$z_0=-17$，$\lambda=-19$，

故所求切平面方程为

$$9x+y-z-27=0 \quad 或 \quad 9x+17y-17z+27=0.$$

二、（15分）



中国大学MOOC

(2013决赛,15分) 设曲面Σ：$z^2=x^2+y^2, 1\le z\le 2$,其面密度为常数ρ. 求在原点处的质量为1的质点和Σ之间的引力(记引力常数为G).

解　设引力$\vec{F}=\{F_x,F_y,F_z\}$，由对称性$F_x=0$，$F_y=0$. 记$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

从原点出发过点(x,y,z)的射线与z轴的夹角为θ，则有$\cos\theta=\dfrac{z}{r}$.

质点和面积微元$\mathrm{d}S$之间的引力为$\mathrm{d}F=G\dfrac{\rho\mathrm{d}S}{r^2}$,

$$\mathrm{d}F_z=G\frac{\rho\mathrm{d}S}{r^2}\cos\theta=G\rho\frac{z}{r^3}\mathrm{d}S,\qquad \text{故}F_z=\iint_{\Sigma}G\rho\frac{z}{r^3}\mathrm{d}S.$$

(2013决赛,15分) 设曲面Σ：$z^2=x^2+y^2, 1\le z\le 2$,其面密度为常数ρ. 求在原点处的质量为1的质点和Σ之间的引力(记引力常数为G).

$$F_z=\iint_{\Sigma} G\rho\frac{z}{r^3}\mathrm{d}S. \qquad \mathrm{d}S=?\quad r=?$$

在z轴上的区间$[1,2]$上取小区间$[z,z+\mathrm{d}z]$,相应于该小区间有

$$\mathrm{d}S=2\pi z\cdot \mathrm{d}s=2\pi z\cdot\sqrt{2}\mathrm{d}z=2\sqrt{2}\pi z\mathrm{d}z.$$

而$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2z^2}=\sqrt{2}z,\quad (\Sigma：\ z^2=x^2+y^2)$

故有 $F_z=\int_1^2 G\rho\frac{2\sqrt{2}\pi z^2}{2\sqrt{2}z^3}\mathrm{d}z=G\rho\pi\int_1^2\frac{1}{z}\mathrm{d}z=G\rho\pi\ln 2.$

三、（15分）



中国大学MOOC

(2013决赛,15分) 设$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续可导，

$f'(x)=\dfrac{1}{1+f^2(x)}\left[\sqrt{\dfrac{1}{x}}-\sqrt{\ln(1+\dfrac{1}{x})}\right]$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在.

分析　证$f(x)$单调增加有上界

证 当$t>0$，对函数$\ln(1+x)$在区间$[0,\ t]$上用拉格朗日中值定理，

有　$\ln(1+t)=\dfrac{t}{1+\xi}$，$0<\xi<t.$

当 $0<\xi<t$ 时，$\dfrac{1}{1+t}<\dfrac{1}{1+\xi}<1$　　由此得　$\dfrac{t}{1+t}<\ln(1+t)<t.$

取$t=\dfrac{1}{x}$，有　$\dfrac{1}{1+x}<\ln(1+\dfrac{1}{x})<\dfrac{1}{x}$,

设$f(x)$在$[1,+\infty)$上连续可导，$f'(x)=\dfrac{1}{1+f^2(x)}\left[\sqrt{\dfrac{1}{x}}-\sqrt{\ln(1+\dfrac{1}{x})}\right]$，

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在.

$$\frac{1}{1+x}<\ln(1+\frac{1}{x})<\frac{1}{x}$$

所以当$x\geq 1$时，有$f'(x)>0$，即在$[1,+\infty)$上单调增加，

又 $f'(x)\leq\sqrt{\dfrac{1}{x}}-\sqrt{\ln(1+\dfrac{1}{x})}\leq\sqrt{\dfrac{1}{x}}-\sqrt{\dfrac{1}{x+1}}=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\leq\frac{1}{2\sqrt{x^3}},$$

故 $\int_1^x f'(t)\mathrm{d}t\leq\int_1^x\dfrac{1}{2\sqrt{t^3}}\mathrm{d}t$，所以$f(x)-f(1)\leq-\dfrac{1}{\sqrt{t}}\Big|_1^x=1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\leq 1$,

即$f(x)\leq f(1)+1$，故$f(x)$有上界.

由于$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调增加有上界，所以$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在.

四、（15分）



中国大学MOOC

(2013决赛,15分)

设函数$f(x)$在$[-2,2]$上二阶可导，且$|f(x)|<1$.又$f^2(0)+[f'(0)]^2=4$.

试证$(-2,2)$内至少存在一点ξ，使得$f(\xi)+f''(\xi)=0$.

分析　设$F(x)=f^2(x)+[f'(x)]^2$，

$$F'(x)=2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)=2f'(x)[f(x)+f''(x)]$$

证　在$[-2,0]$和$[0,2]$上分别对$f(x)$应用拉格朗日中值定理，

可知存在$\xi_1\in(-2,0)$，$\xi_2\in(0,2)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(0)-f(-2)}{2}，\ f'(\xi_2)=\frac{f(2)-f(0)}{2}.$$

设函数$f(x)$在$[-2,2]$上二阶可导，且$|f(x)|<1$.又$f^2(0)+[f'(0)]^2=4$.
试证在$(-2,2)$内至少存在一点ξ，使得$f(\xi)+f''(\xi)=0$.

存在$\xi_1\in(-2,0)$，$\xi_2\in(0,2)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(0)-f(-2)}{2},\quad f'(\xi_2)=\frac{f(2)-f(0)}{2}.$$

由于$|f(x)|<1$，所以$|f'(\xi_1)|\le 1,|f'(\xi_2)|\le 1.$

设$F(x)=f^2(x)+[f'(x)]^2$，则 $|F(\xi_1)|\le 2,|F(\xi_2)|\le 2.$ ①

由于$F(0)=f^2(0)+[f'(0)]^2=4$，且$F(x)$为$[\xi_1,\ \xi_2]$上的连续函数，

设函数$f(x)$在$[-2,2]$上二阶可导，且$|f(x)|<1$.又$f^2(0)+[f'(0)]^2=4$.
试证在$(-2,2)$内至少存在一点ξ，使得$f(\xi)+f''(\xi)=0$.

应用闭区间上连续函数的最大值定理，$F(x)$在$[\xi_1,\ \xi_2]$上必定能够取得最大值，设为M，则当ξ为$F(x)$的最大值点时，$M=F(\xi)\geq 4$，

$|F(\xi_1)|\leq 2, |F(\xi_2)|\leq 2$

由①式知$\xi\in(\xi_1,\ \xi_2)$，所以ξ必是$F(x)$的极大值点.

注意到$F(x)$可导，由极值的必要条件可知

$$F'(\xi)=2f'(\xi)[f(\xi)+f''(\xi)]=0.$$

由于$F(\xi)=f^2(\xi)+[f'(\xi)]^2\geq 4, |f(\xi)|<1$，　可知$f'(\xi)\neq 0$.

故存在$\xi\in(-2,2)$，使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

五、（15分）



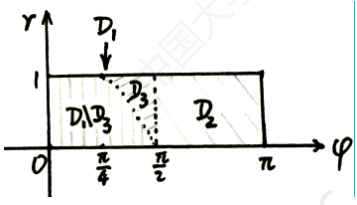
中国大学MOOC

(2013决赛,15分)求二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left|x^2+y^2-x-y\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

解 由对称性，可以只考虑区域$y \ge x$, 令$\theta = \varphi - \dfrac{\pi}{4}$

$$I = 2\int_{\pi/4}^{5\pi/4} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \left|r-\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right| r^2\mathrm{d}r = 2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^1 \left|r-\sqrt{2}\cos\theta\right| r^2\mathrm{d}r$$

$$= 2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi \int_0^1 \left|r-\sqrt{2}\cos\varphi\right| r^2\mathrm{d}r.$$



(φ, r) 所在的区域为矩形：D ：$0 \le \varphi \le \pi$ ，$0 \le r \le 1$.

把 D 分解为 $D_1 \bigcup D_2$ ，其中 D_1 ：$0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$ ，$0 \le r \le 1$ ，

D_2 ：$\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$ ，$0 \le r \le 1$. D_3 ：$\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$ ，$\sqrt{2}\cos\varphi \le r \le 1$,这里D_3是D_1子集，

且记$I_i = \iint\limits_{D_i} \left|r-\sqrt{2}\cos\varphi\right| r^2\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$ （$i=1,2,3$），则 $I = 2\,(I_1+I_2)$

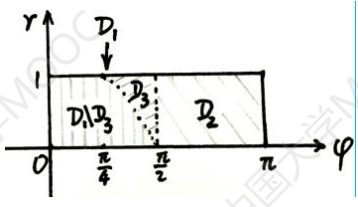
(2013决赛,15分)求二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left|x^2+y^2-x-y\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

注意到$(r-\sqrt{2}\cos\varphi)r^2$在$D_1\setminus D_3, D_2, D_3$的符号分别为负，正，正，则

$$I_3=\int_{\pi/4}^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \int_{\sqrt{2}\cos\varphi}^{1}(r-\sqrt{2}\cos\varphi)\, r^2\mathrm{d}r=\frac{3\pi}{32}+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$I_1=\iint_{D_1}(\sqrt{2}\cos\varphi-r)\, r^2\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r+2I_3=\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\pi}{8}+2I_3=\frac{\pi}{16}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$I_2=\iint_{D_2}(r-\sqrt{2}\cos\varphi)\, r^2\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r=\frac{\pi}{8}+\frac{\sqrt{2}}{3}.$$



所以 $I=2\,(I_1+I_2)=1+\frac{3\pi}{8}.$

六、（15分）



中国大学MOOC

(2013决赛,15分)

若对于任何收敛于零的序列$\{x_n\}$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$都是收敛的，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛.

证 用反证法　　若$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散，必有$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\infty$，

则存在自然数$m_1<m_2<\cdots<m_k<\cdots$，使得 $\sum_{i=1}^{m_1}|a_i|\geq 1,\ \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k}|a_i|\geq k,\ \ k=2,3,\cdots$

取$x_i=\frac{1}{k}\operatorname{sgn} a_i\quad (m_{k-1}\leq i\leq m_k)$，　则 $\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} a_i x_i=\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k}\frac{|a_i|}{k}=\frac{1}{k}\sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k}|a_i|\geq 1.$

由此可知存在数列$\{x_n\}\to 0\ (n\to\infty)$，使得$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$发散，矛盾，

所以$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛.

END



中国大学MOOC