全国大学生
数学竞赛



第4届预赛

中国大学MOOC

一、解答下列各题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

(要求写出重要步骤)

第1题



中国大学MOOC

(2012预赛,6分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

解 因为 $(n!)^{\frac{1}{n^2}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{n^2}\ln(n!)}$，而

$$\frac{1}{n^2}\ln(n!)=\frac{1}{n}\cdot\frac{\ln(1\cdot 2\cdots n)}{n}=\frac{1}{n}\left(\frac{\ln 1}{n}+\frac{\ln 2}{n}+\cdots+\frac{\ln n}{n}\right)\le\frac{1}{n}\left(\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\cdots+\frac{\ln n}{n}\right),$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\ln 1}{1}+\dfrac{\ln 2}{2}+\cdots+\dfrac{\ln n}{n}\right)=0$,

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln(n!)=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1.$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$

一、解答下列各题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

(要求写出重要步骤)

第2题



中国大学MOOC

(2012预赛,6分)

求通过直线L:$\begin{cases}2x+y-3z+2=0\\5x+5y-4z+3=0\end{cases}$的两个相互垂直的平面$\pi_1$和$\pi_2$，使其中一个平面过点$(4,-3,1)$.

解 过直线L的平面束为 $\lambda(2x+y-3z+2)+\mu(5x+5y-4z+3)=0$，

即 $(2\lambda+5\mu)x+(\lambda+5\mu)y-(3\lambda+4\mu)z+(2\lambda+3\mu)=0$，

若平面π_1过点$(4,-3,1)$，代入得$\lambda+\mu=0$，即$\mu=-\lambda$，

从而π_1的方程为 $3x+4y-z+1=0$

由平面束中的平面π_2与π_1垂直，则 $3(2\lambda+5\mu)+4(\lambda+5\mu)+(3\lambda+4\mu)=0$，

解得$\lambda=-3\mu$，从而平面π_2的方程为 $x-2y-5z+3=0$.

一、解答下列各题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

(要求写出重要步骤)

第3题



中国大学MOOC

(2012预赛, 6分) 已知函数$z=u(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$，且$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，确定常数$a$和$b$，使函数$z=z(x,y)$满足方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0.$

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{ax+by}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+au\right)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{ax+by}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+bu\right)$，已知条件：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\mathrm{e}^{ax+by}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+au\right)\right]=b\mathrm{e}^{ax+by}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+au\right)+\mathrm{e}^{ax+by}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$=\mathrm{e}^{ax+by}\left[b\frac{\partial u}{\partial x}+a\frac{\partial u}{\partial y}+abu\right]$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=\mathrm{e}^{ax+by}\left[(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u\right].$$

(2012预赛, 6分) 已知函数$z=u(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$，且$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，确定常数$a$和$b$，使函数$z=z(x,y)$满足方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0.$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=\mathrm{e}^{ax+by}\left[(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u\right].$$

若使$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0$，只有

$$(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u=0$$

即 $a=b=1.$

一、解答下列各题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

(要求写出重要步骤)

第4题



中国大学MOOC

(2012预赛, 6分) 设函数$u=u(x)$连续可微，$u(2)=1$，且
$\int_L (x+2y)u\mathrm{d}x+(x+u^3)u\mathrm{d}y$在右半平面与路径无关，求$u(x)$.

解　由$\dfrac{\partial}{\partial x}\left[u(x+u^3)\right]=\dfrac{\partial}{\partial y}\left[(x+2y)\,u\right]$　$\Rightarrow u+xu'+4u^3u'=2u$

$\Rightarrow (x+4u^3)\,u'=u,$　$\Rightarrow$　$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{u}{x+4u^3}$　　即　$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}-\dfrac{1}{u}x=4u^2,$

方程通解为

$$x=\mathrm{e}^{\ln u}\left(\int 4u^2\mathrm{e}^{-\ln u}\mathrm{d}u+C\right)=u\left(\int 4u\mathrm{d}u+C\right)=u(2u^2+C),$$

由$u(2)=1$得$C=0$, 故$u=\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$.

一、解答下列各题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

(要求写出重要步骤)

第5题



中国大学MOOC

(2012预赛,6分) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t$

解　因为当$x>1$时，

$$\left|\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t\right|\le\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{|\sin t|}{\sqrt{t-1}}\mathrm{d}t\le\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{t-1}}\mathrm{d}t$$

$$=2\sqrt[3]{x}(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})=2\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\to 0\ \ (x\to\infty),$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t\right|=0.$

从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t=0.$

二、（10分）



中国大学MOOC

(2012预赛,10分) 计算$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x$.

分析 $\int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-2x}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x \le \int_0^{x} \mathrm{e}^{-2x}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x < \int_0^{(n+1)\pi} \mathrm{e}^{-2x}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x$

解 $\int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-2x}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \mathrm{e}^{-2x}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} (-1)^{k-1}\mathrm{e}^{-2x}\sin x\mathrm{d}x,$

使用分部积分公式

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \mathrm{e}^{-2x}\sin x\mathrm{d}x = -\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}\cos x = -\mathrm{e}^{-2x}\cos x\Big|_{(k-1)\pi}^{k\pi} - 2\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \mathrm{e}^{-2x}\cos x\mathrm{d}x$$

$$= -\mathrm{e}^{-2x}\cos x\Big|_{(k-1)\pi}^{k\pi} - 2\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}\sin x$$

$$= -\mathrm{e}^{-2x}\cos x\Big|_{(k-1)\pi}^{k\pi} - 2\mathrm{e}^{-2x}\sin x\Big|_{(k-1)\pi}^{k\pi} - 4\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \mathrm{e}^{-2x}\sin x\mathrm{d}x$$

(2012预赛,10分) 计算$\int_0^{+\infty} e^{-2x}\left|\sin x\right|dx$.

$$\therefore \quad \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-2x}\sin x dx = -\frac{1}{5}e^{-2x}(\cos x + 2\sin x)\Big|_{(k-1)\pi}^{k\pi} = \frac{1}{5}(-1)^{k-1}e^{-2k\pi}(1+e^{2\pi})$$

从而$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}(-1)^{k-1}e^{-2x}\sin x dx = (-1)^{k-1}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-2x}\sin x dx = \frac{1}{5}e^{-2k\pi}(1+e^{2\pi})$,

$$\int_0^{n\pi} e^{-2x}\left|\sin x\right|dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}(-1)^{k-1}e^{-2x}\sin x dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{5}e^{-2k\pi}(1+e^{2\pi}) = \frac{1}{5}(1+e^{2\pi})\sum_{k=1}^{n}e^{-2k\pi} = \frac{1}{5}(1+e^{2\pi})\frac{e^{-2\pi}-e^{-2(n+1)\pi}}{1-e^{-2\pi}},$$

当$n\pi \le x < (n+1)\pi$时,

$$\int_0^{n\pi} e^{-2x}\left|\sin x\right|dx \le \int_0^{x} e^{-2x}\left|\sin x\right|dx < \int_0^{(n+1)\pi} e^{-2x}\left|\sin x\right|dx,$$

(2012预赛,10分) 计算$\int_0^{+\infty} e^{-2x}\left|\sin x\right| dx.$

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-2x}\sin x dx = \frac{1}{5}(-1)^{k-1}e^{-2k\pi}(1+e^{2\pi})$$

$$\int_0^{n\pi} e^{-2x}\left|\sin x\right| dx = \frac{1}{5}(1+e^{2\pi})\frac{e^{-2\pi}-e^{-2(n+1)\pi}}{1-e^{-2\pi}}$$

当$n\pi \le x < (n+1)\pi$时，

$$\int_0^{n\pi} e^{-2x}\left|\sin x\right| dx \le \int_0^{x} e^{-2x}\left|\sin x\right| dx < \int_0^{(n+1)\pi} e^{-2x}\left|\sin x\right| dx,$$

令$n\to\infty$，由夹逼准则，得

$$\int_0^{\infty} e^{-2x}\left|\sin x\right| dx = \lim_{x\to\infty}\int_0^{x} e^{-2x}\left|\sin x\right| dx = \frac{1}{5}(1+e^{2\pi})\frac{e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}.$$

三、（10分）



中国大学MOOC

(2012预赛,10分) 求方程$x^2\sin\frac{1}{x}=2x-501$的近似值，精确到0.001.

解 由泰勒公式有 $\sin t=t-\frac{\sin(\theta t)}{2}t^2,\qquad 0<\theta<1,$

令$t=\frac{1}{x}$得$\sin\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{\sin(\frac{\theta}{x})}{2x^2},$

代入原方程得 $x-\frac{1}{2}\sin(\frac{\theta}{x})=2x-501$，即$x=501-\frac{1}{2}\sin(\frac{\theta}{x}),$

由此知$x>500$，$0<\frac{\theta}{x}<\frac{1}{500}$，$|x-501|=\frac{1}{2}\left|\sin(\frac{\theta}{x})\right|\le\frac{1}{2}\cdot\frac{\theta}{x}\le\frac{1}{1000}=0.0001,$

所以，$x=501$ 即为满足题设条件的解.

四、（12分）



中国大学MOOC

(2012预赛,10分)

设函数$y=f(x)$的二阶导数连续，且$f''(x)>0$，$f(0)=0$，$f'(0)=0$，求

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}$，其中$u$是曲线$y=f(x)$在点$P(x,f(x))$处的切线在$x$轴上的截距.

解 曲线$y=f(x)$在点$P(x,f(x))$处的切线方程为 $Y-f(x)=f'(x)(X-x)$,

令$Y=0$，则有$X=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$，由此$u=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$,

$$\lim_{x\to 0}u=\lim_{x\to 0}\left[x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right]=\lim_{x\to 0}x-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f'(x)}=-\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}}=\frac{f'(0)}{f''(0)}=0.$$

$f(x)$在$x=0$处展为二阶泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)=\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2),$$

设函数$y=f(x)$的二阶导数连续，且$f''(x)>0$，$f(0)=0$，$f'(0)=0$，求

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}$，其中$u$是曲线$y=f(x)$在点$P(x,f(x))$处的切线在$x$轴上的截距.

$\lim\limits_{x\to 0}u=0$　　$f(x)=\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3 f(u)}{f(x)u^3}$$

当$u\to 0$时，　$\sin u\sim u$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left[\dfrac{f''(0)}{2}u^2+o(u^2)\right]}{u^3\left[\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{u}\frac{\left[\dfrac{f''(0)}{2}+u^2\cdot o(u^2)\right]}{\left[\dfrac{f''(0)}{2}+x^2\cdot o(x^2)\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{u}$$

设函数$y=f(x)$的二阶导数连续，且$f''(x)>0$，$f(0)=0$，$f'(0)=0$，求

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}$，其中$u$是曲线$y=f(x)$在点$P(x,f(x))$处的切线在$x$轴上的截距.

$$\lim_{x\to 0}\frac{u}{x}=1-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{xf'(x)}=1-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)}{xf'(x)}$$

$$u=x-\frac{f(x)}{f'(x)},$$

$$=1-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f''(0)}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2}}{\frac{f'(x)-f'(0)}{x}}=1-\frac{1}{2}\frac{f''(0)}{f''(0)}=\frac{1}{2},$$

$$f(x)=\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2),$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{u}=2$

五、（12分）



中国大学MOOC

(2012预赛,12分)

求最小的实数C，使得满足$\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x = 1$ 的连续的函数$f(x)$都有

$\int_0^1 f(\sqrt{x})\mathrm{d}x \le C.$

解 $\int_0^1 |f(\sqrt{x})|\mathrm{d}x = \int_0^1 |f(t)2t|\mathrm{d}t \le 2\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t = 2$ 令$\sqrt{x} = t$

另一方面，取$f_n(x) = (n+1)x^n$，则$\int_0^1 |f_n(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 1,$

$$\int_0^1 f_n(\sqrt{x})\mathrm{d}x = 2\int_0^1 t f_n(t)\mathrm{d}t = 2(n+1)\int_0^1 t^{n+1}\mathrm{d}t = 2\frac{n+1}{n+2}$$

$$= 2(1-\frac{1}{n+2}) \to 2 \quad (n \to \infty),$$

因此最小的实数$C = 2.$

六、（12分）



中国大学MOOC

(2012预赛, 12分) 设$F(x)$为连续函数，$t>0$，区域Ω是由抛物面$z=x^2+y^2$和球面$x^2+y^2+z^2=t^2\ (t>0)$所围起来的部分，定义三重积分$F(t)=\iiint_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$，求$F(t)$的导数$F'(t)$.

解 令$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$ 则Ω:$\begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le r\le a \\ r^2\le z\le\sqrt{t^2-r^2} \end{cases}$

$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2=t^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+(x^2+y^2)^2=t^2,$$

令$a^2=x^2+y^2$，则$a^2+a^4=t^2$，即$a^2=\dfrac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$,

$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}} f(r^2+z^2)\mathrm{d}z=2\pi\int_0^a r\left[\int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}} f(r^2+z^2)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}r,$$

区域Ω是由抛物面$z=x^2+y^2$和球面$x^2+y^2+z^2=t^2\ (t>0)$所围

$F(t)=\iiint_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$，求$F'(t)$.

$$F(t)=2\pi\int_0^a r\left[\int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}} f(r^2+z^2)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}r,$$

$$a^2=\frac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2},$$

设 $F(t)=\int_{c(t)}^{d(t)} f(t,y)\mathrm{d}y$

则 $F'(t)=\int_{c(t)}^{d(t)} f_t(t,y)\mathrm{d}y+f(t,d(t))d'(t)-f(t,c(t))c'(t)$

$$F(t)=2\pi\int_0^{a(t)} r\left[\int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}} f(r^2+z^2)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}r,$$

$$F'(t)=2\pi\left[\int_0^a rf(r^2+t^2-r^2)\frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}\mathrm{d}r+a\int_{a^2}^{\sqrt{t^2-a^2}} f(a^2+z^2)\mathrm{d}z\cdot\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right]$$

$F(t)=\iiint_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$，求$F'(t)$.

令$a^2=x^2+y^2$，则$a^2+a^4=t^2$，即$a^2=\dfrac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$,

$$F'(t)=2\pi\left[\int_0^a rf(r^2+t^2-r^2)\frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}\mathrm{d}r+a\int_{a^2}^{\sqrt{t^2-a^2}} f(a^2+z^2)\mathrm{d}z\cdot\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right]$$

注意到$\sqrt{t^2-a^2}=a^2$，第二个积分为0，我们得到

$$F'(t)=2\pi\int_0^a rf(t^2)\frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}\mathrm{d}r=2\pi f(t^2)t\int_0^a\frac{r}{\sqrt{t^2-r^2}}\mathrm{d}r=-\pi f(t^2)t\int_0^a\frac{1}{\sqrt{t^2-r^2}}\mathrm{d}(t^2-r^2)$$

$$=-\pi tf(t^2)\cdot 2\sqrt{t^2-r^2}\,|_0^a=-2\pi tf(t^2)\cdot\left(\sqrt{t^2-a^2}-t\right)=-2\pi tf(t^2)\cdot\left(a^2-t\right)$$

$$=2\pi tf(t^2)(t-a^2)=2\pi tf(t^2)(t-\frac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2})=\pi tf(t^2)(2t+1-\sqrt{1+4t^2})$$

区域Ω是由抛物面$z=x^2+y^2$和球面$x^2+y^2+z^2=t^2\ (t>0)$所围

$F(t)=\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$，求$F'(t)$.

$$F'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}$$

另解 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x^2+y^2+z^2=t^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+(x^2+y^2)^2=t^2,$

令$g=x^2+y^2$，则$g+g^2=t^2$，即$g=\dfrac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$,

原点到点(x,y,z)的射线方向向量为$\{x,y,z\}$，z轴的方向向量为$\{0,0,1\}$

$$\cos\theta_t=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{z}{t}=\frac{g}{t}$$

即$g=g(t)=\dfrac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$，则 Ω 在 xOy 面上的投影为$x^2+y^2\le g$,

在曲线 $S:\begin{cases} x^2+y^2=z \\ x^2+y^2+z^2=t^2 \end{cases}$ 上任取一点(x,y,z),

则原点到该点的射线和z轴的夹角为$\theta_t=\arccos\dfrac{z}{t}=\arccos\dfrac{g}{t}$，取$\Delta t>0$，则$\theta_t<\theta_{t+\Delta t}$.

区域Ω是由抛物面$z=x^2+y^2$和球面$x^2+y^2+z^2=t^2\ (t>0)$所围

$F(t)=\iiint_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$，求$F'(t)$.

记$g=g(t)=\dfrac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$，则 Ω 在 xOy 面上的投影为$x^2+y^2\le g$，

曲线 S 上任取一点(x,y,z)，则原点到该点的射线和z轴的夹角为

$\theta_t=\arccos\dfrac{z}{t}=\arccos\dfrac{g}{t}$，取$\Delta t>0$，则$\theta_t>\theta_{t+\Delta t}$.

对于固定的$t>0$，考虑积分差$F(t+\Delta t)-F(t)$，这是一个在厚度为 Δt 的球壳上的积分，原点到球壳边缘上的点的射线和z轴夹角在$\theta_{t+\Delta t}$和θ_t之间，我们使用球坐标变换来做这个积分.

区域Ω是由抛物面$z=x^2+y^2$和球面$x^2+y^2+z^2=t^2\ (t>0)$所围

$F(t)=\iiint_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$，求$F'(t)$.

由积分的连续性可知，存在$\alpha=\alpha(\Delta t)$，$\theta_{t+\Delta t}\le\alpha\le\theta_t$，

使得 $F(t+\Delta t)-F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\alpha}\mathrm{d}\theta\int_t^{t+\Delta t} f(r^2)r^2\sin\theta\mathrm{d}r$，

这样就有$F(t+\Delta t)-F(t)=2\pi(1-\cos\alpha)\int_t^{t+\Delta t} f(r^2)r^2\mathrm{d}r$，而当$\Delta t\to 0^+$时

$$\cos\alpha\to\cos\theta_t=\frac{g(t)}{t},\qquad \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} f(r^2)r^2\mathrm{d}r\to t^2 f(t^2).$$

故$F(t)$的右导数为 $2\pi(1-\dfrac{g(t)}{t})t^2 f(t^2)=\pi(2t+1-\sqrt{1+4t^2})tf(t^2).$

当$\Delta t<0$时，考虑$F(t)-F(t+\Delta t)$可以得到同样的左导数，

因此 $F'(t)=\pi(2t+1-\sqrt{1+4t^2})tf(t^2).$

七、（12分）



中国大学MOOC

(2012预赛,14分) 设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$为正项级数.

(1)若$\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})>0$，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛;

(2)若$\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})<0$，且$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散

证 (1)设$\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}})=2\delta>\delta>0,$

则存在$N\in\mathbf{N}$，对于任意的$n\geq N$，有 $\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}>\delta$， $\Rightarrow \frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\delta a_{n+1},$

$\Rightarrow\ a_{n+1}<\frac{1}{\delta}(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}),\ \sum_{n=N}^{m} a_{n+1}<\frac{1}{\delta}\sum_{n=N}^{m}(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}})=\frac{1}{\delta}(\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}})<\frac{1}{\delta}\frac{a_N}{b_N},$

(2)若$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}})<0$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散

因而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和有上界，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛

$$\sum_{n=N}^{m}a_{n+1}<\frac{1}{\delta}\frac{a_N}{b_N},$$

(2)若$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}})<\delta<0$,

则存在$N\in\mathbf{N}$，对于任意的$n\geq N$，有$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<\dfrac{b_n}{b_{n+1}}$,

$$a_{n+1}>\frac{b_{n+1}}{b_n}a_n>\frac{b_{n+1}}{b_n}\cdot\frac{b_n}{b_{n-1}}a_{n-1}>\cdots>\frac{b_{n+1}}{b_n}\cdot\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdot\cdots\cdot\frac{b_{N+1}}{b_N}a_N=\frac{a_N}{b_N}b_{n+1},$$

于是由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散，根据正项级数比较审敛法得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

END



中国大学MOOC