全国大学生
数学竞赛



第3届决赛

中国大学MOOC

一、计算下列各题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

(要求写出重要步骤)

第1题



中国大学MOOC

(2012决赛,6分) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$.

$\dfrac{0}{0}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^4}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x + x\cos x)(\sin x - x\cos x)}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x\cos x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$$

$$= \left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} + \lim_{x\to 0}\cos x\right]\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3x^2}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

一、计算下列各题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

(要求写出重要步骤)

第2题



中国大学MOOC

(2012决赛,6分) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x^3+\dfrac{x}{2}-\tan\dfrac{1}{x})\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$. 令$t=\dfrac{1}{x}$

解

$$I=\lim_{t\to0^+}\left[(\frac{1}{t^3}+\frac{1}{2t}-\tan t)\mathrm{e}^t-\sqrt{1+\frac{1}{t^6}}\right]=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^3}\left[(1+\frac{t^2}{2}-t^3\tan t)\mathrm{e}^t-\sqrt{1+t^6}\right]$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^3}\left[(1+\frac{t^2}{2})\mathrm{e}^t-1\right]-\lim_{t\to0^+}\tan t\mathrm{e}^t-\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+t^6}-1}{t^3}$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}^t-1+\frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t}{t^3}-0-\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{2}t^6}{t^3}$$

$x\to0$ 时，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}^t+t\mathrm{e}^t+\frac{t^2}{2}\mathrm{e}^t}{3t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{2+2t+t^2}{6t^2}\cdot\lim_{t\to0^+}\mathrm{e}^t=+\infty.$$

一、计算下列各题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

(要求写出重要步骤)

第3题



中国大学MOOC

3.(2012决赛,6分) 设函数$f(x,y)$有二阶连续偏导数，满足$f_x^2 f_{yy} - 2 f_x f_y f_{xy} + f_y^2 f_{xx} = 0$,
且$f_y \neq 0$，$y = y(x,z)$是由方程$z = f(x,y)$所确定的函数，求$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

解　$z = f(x,y)$两边对x求偏导数得 $f_x + f_y \cdot \dfrac{\partial y}{\partial x} = 0$　①　$\Rightarrow \dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{f_x}{f_y}$

①两边对x求偏导数得 $(f_{xx} + f_{xy} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial x}) + (f_{yx} + f_{yy} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial x}) \cdot \dfrac{\partial y}{\partial x} + f_y \cdot \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$

$\Rightarrow f_{xx} + 2 f_{xy} \dfrac{\partial y}{\partial x} + f_{yy} (\dfrac{\partial y}{\partial x})^2 + f_y \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$

把$\dfrac{\partial y}{\partial x} = -\dfrac{f_x}{f_y}$带入上式得 $\dfrac{f_y^2 f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy} + f_x^2 f_{yy}}{f_y^2} + f_y \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$

由题设条件得 $f_y \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$　　而$f_y \neq 0$，故$\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$

一、计算下列各题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

(要求写出重要步骤)

第4题



中国大学MOOC

(2012决赛,6分) 求不定积分$I=\int(1+x-\frac{1}{x})\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$.

解 $I=\int \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x+\int(x-\frac{1}{x})\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$

$=\int \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x+\int x(1-\frac{1}{x^2})\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x+\int x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})$

$=\int \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x+\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}=\int \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x+x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}-\int \mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$

$=x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}+C.$

一、计算下列各题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

(要求写出重要步骤)

第5题



中国大学MOOC

(2012决赛,6分) 求曲面$x^2+y^2=az$和$z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\,(a>0)$所围立体的表面积.

$$S: z=z(x,y),\quad S=\iint_S \mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解 联立$x^2+y^2=az, z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$,解得两曲面的交线所在平面$z=a$(舍去$z=4a$), 它将表面积分为$S_1$: $x^2+y^2=az$和S_2: $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$

S_1: $z=\dfrac{x^2+y^2}{a}$, xOy平面的投影为: $x^2+y^2\le a^2$

$$S_1=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{2x}{a}\right)^2+\left(\frac{2y}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\frac{4x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(2012决赛,6分) 求曲面$x^2+y^2=az$和$z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\,(a>0)$所围立体的表面积.

S_2：$z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$，xOy平面的投影为：$x^2+y^2\le a^2$

$$S_2=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(-\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$S=S_1+S_2=\iint_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{1+\frac{4x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{\sqrt{a^2+4r^2}}{a}r\mathrm{d}r+\sqrt{2}\pi a^2=\pi a^2\left(\frac{5\sqrt{5}-1}{6}+\sqrt{2}\right).$$

二、（13分）



中国大学MOOC

(2012决赛,13分)

讨论$\int_0^{+\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^{\alpha}\sin^2 x}\mathrm{d}x$的敛散性，其中$\alpha$是一个常实数.

解　记$f(x)=\frac{x}{\cos^2 x+x^{\alpha}\sin^2 x}$　　若$\alpha\le 0$，则$f(x)\ge\frac{x}{2}(\forall x>1)$;

若$0<\alpha\le 2$，则$\alpha-1\le 1$，而$f(x)\ge\frac{x^{1-\alpha}}{2}(\forall x>1)$，所以$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$发散.

若$\alpha>2$，设$a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}f(x)\mathrm{d}x$，考虑级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的敛散性即可.

当$n\pi\le x\le(n+1)\pi$时，有

$$\frac{n\pi}{1+\left[(n+1)^{\alpha}\pi^{\alpha}-1\right]\sin^2 x}\le f(x)=\frac{x}{1+(x^{\alpha}-1)\sin^2 x}\le\frac{(n+1)\pi}{1+(n^{\alpha}\pi^{\alpha}-1)\sin^2 x}.$$

讨论$\int_0^{+\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^{\alpha}\sin^2 x}\mathrm{d}x$的敛散性，其中$\alpha$是一个常实数.

$$\frac{n\pi}{1+\left[(n+1)^{\alpha}\pi^{\alpha}-1\right]\sin^2 x}\le f(x)=\frac{x}{1+(x^{\alpha}-1)\sin^2 x}\le\frac{(n+1)\pi}{1+(n^{\alpha}\pi^{\alpha}-1)\sin^2 x}.$$

对任何$b>0$，有 $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+b\sin^2 x}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+b\sin^2 x}$ 令$t=\cot x$

$$=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\cot x}{b+\csc^2 x}=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\cot x}{b+1+\cot^2 x}=2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{b+1+t^2}=\frac{\pi}{\sqrt{b+1}}.$$

存在$0<A_1\le A_2$，使得$\frac{A_1}{n^{\frac{\alpha}{2}-1}}\le a_n\le\frac{A_2}{n^{\frac{\alpha}{2}-1}}$.

故当$\alpha>4$，所讨论的积分收敛； 当$2<\alpha\le 4$，所讨论的积分发散.

讨论$\int_0^{+\infty}\frac{x}{\cos^2 x+x^{\alpha}\sin^2 x}\mathrm{d}x$的敛散性，其中$\alpha$是一个常实数.

若$\alpha\le 0,\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散；　　若$0<\alpha\le 2,\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散.

若$\alpha>4,\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛；　　若$2<\alpha\le 4,\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散.

故当$\alpha>4$，所讨论的积分收敛；当$\alpha\le 4$，所讨论的积分发散.

三、（13分）



中国大学MOOC

(2012决赛,13分) 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上无穷次可微，并且满足：存在$M>0$，使得$\left|f^{(k)}(x)\right|\le M$ $(k=1,2,\cdots)$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，且$f(\frac{1}{2^n})=0(n=1,2,\cdots)$.

求证：在$(-\infty,+\infty)$上，$f(x)\equiv 0$.

证 因为$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上无穷次可微，$f(x)$展为麦克劳林公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n.$$

令$x=\frac{1}{2^n}$得 $f(0)+f'(0)\cdot\frac{1}{2^n}+\frac{f''(0)}{2!}\cdot\frac{1}{2^{2n}}+\cdots+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\frac{1}{2^{n^2}}=f(\frac{1}{2^n})$

等式两端求极限得 $f(0)=\lim\limits_{n\to\infty}f(\frac{1}{2^n})=0$

设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上无穷次可微，并且满足：存在$M>0$，使得

$\left|f^{(k)}(x)\right|\le M\ (k=1,2,\cdots)$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，且$f(\frac{1}{2^n})=0(n=1,2,\cdots)$.

求证：在$(-\infty,+\infty)$上，$f(x)\equiv 0$.

于是 $f'(0)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\frac{1}{2^n})-f(0)}{\frac{1}{2^n}}=0.$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(0+x)-f(0)}{x}$$

由罗尔定理，对于自然数n，在$\left[\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right]$上，$f(\frac{1}{2^{n+1}})=0,\quad f(\frac{1}{2^n})=0$

存在$\xi_n^{(1)}\in(\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n})$，使得 $f'(\xi_n^{(1)})=0,$

从而$\xi_n^{(1)}\to 0$（$n\to\infty$）,$(n=1,2,\cdots)$.这里$\xi_1^{(1)}>\xi_2^{(1)}>\xi_3^{(1)}>\cdots>\xi_n^{(1)}>\xi_{n+1}^{(1)}>\cdots.$

故$f'(0)=\lim\limits_{n\to\infty}f'(\xi_n^{(1)})=0$

设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上无穷次可微，并且满足：存在$M>0$，使得

$\left|f^{(k)}(x)\right|\le M\ (k=1,2,\cdots)$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，且$f(\frac{1}{2^n})=0(n=1,2,\cdots)$.

求证：在$(-\infty,+\infty)$上，$f(x)\equiv 0$.

在$\left[\xi_{n+1}^{(1)},\ \xi_n^{(1)}\right](n=1,2,\cdots)$上，对$f'(x)$应用罗尔定理，

存在$\xi_n^{(2)}\in(\xi_{n+1}^{(1)},\ \xi_n^{(1)})$，使得$f''(\xi_n^{(2)})=0$，且$\xi_n^{(2)}\to 0$（$n\to\infty$），

从而 $f''(0)=\lim\limits_{n\to\infty}f''(\xi_n^{(2)})=0.$　　类似的，对任意的n，有$f^{(n)}(0)=0.$

故 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\equiv 0$



四、(本题(1) 6分，(2，10分，共16分)

中国大学MOOC

(2012决赛,16分:(1)6分,(2)10分) 设D为椭圆形$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1(a>b>0)$,面密度为$\rho$的均匀薄板;$l$为通过椭圆焦点$(-c,0)$(其中$c^2=a^2-b^2$)垂直于薄板的旋转轴.

(1)求薄板D绕l旋转的转动惯量J;

(2)对于固定的转动惯量,讨论椭圆薄板的面积是否有最大值和最小值.

$$I_z=\iint_D (x^2+y^2)\rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解 (1)

$$J=\iint_D [(c+x)^2+y^2]\rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\rho\iint_D (c^2+2cx+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\rho\iint_D (c^2+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad 令\begin{cases}x=at\cos\varphi\\ y=bt\sin\varphi\end{cases}$$

$$=2\rho\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 (c^2+a^2t^2\cos^2\varphi+b^2t^2\sin^2\varphi)abt\mathrm{d}t$$

$$=2\rho[\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 c^2abt\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 a^2t^2\cos^2\varphi abt\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 b^2t^2\sin^2\varphi abt\mathrm{d}t]$$

(1)求薄板D绕l旋转的转动惯量J;

$$J=2\rho[\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 c^2abt\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 a^2t^2\cos^2\varphi abt\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 b^2t^2\sin^2\varphi abt\mathrm{d}t]$$

$$\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 c^2abt\mathrm{d}t=abc^2\frac{\pi}{2}=ab(a^2-b^2)\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 a^2t^2\cos^2\varphi abt\mathrm{d}t=\frac{a^3b}{8}\int_0^{\pi}(1+\cos 2\varphi)\mathrm{d}\varphi=a^3b\frac{\pi}{8},$$

$$\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 b^2t^2\sin^2\varphi abt\mathrm{d}t=\frac{ab^3}{8}\int_0^{\pi}(1-\cos 2\varphi)\mathrm{d}\varphi=ab^3\frac{\pi}{8},$$

$$\therefore\quad J=\frac{ab\pi}{4}(5a^2-3b^2)\rho.$$

(1)求薄板D绕l旋转的转动惯量J；

(2)对于固定的转动惯量，讨论椭圆薄板的面积是否有最大值和最小值.

(1) $J=\dfrac{ab\pi\rho}{4}(5a^2-3b^2)$.

(2) 薄板面积：$S=\pi ab$，$a\in(0,+\infty)$

设J固定，$b(a)$是由$J=\dfrac{ab\pi\rho}{4}(5a^2-3b^2)$确定的隐函数，

方程$5a^3b-3ab^3=\dfrac{4J}{\pi\rho}$两端关于$a$求导：$15a^2b+5a^3b'(a)-3b^3-9ab^2b'(a)=0$

则 $b'(a)=\dfrac{3b^3-15a^2b}{5a^3-9ab^2}$.

对$S(a)=\pi ab(a)$求导，得

$$S'(a)=\pi\left[b(a)+ab'(a)\right]=\pi\left[b+a\cdot\frac{3b^3-15a^2b}{a(5a^2-9b^2)}\right]=-2\pi b\left(\frac{5a^2+3b^2}{5a^2-9b^2}\right).$$

当$b=\dfrac{\sqrt{5}}{3}a$时，$S'(a)$不存在；当$b<\dfrac{\sqrt{5}}{3}a$时，$S'(a)<0$；当$\dfrac{\sqrt{5}}{3}a<b\le a$时，$S'(a)>0$.

(1)求薄板D绕l旋转的转动惯量J;

(2)对于固定的转动惯量，讨论椭圆薄板的面积是否有最大值和最小值.

$S=\pi ab$

$J=\dfrac{ab\pi\rho}{4}(5a^2-3b^2),$

当$b=a$时，$a=(\dfrac{2J}{\rho\pi})^{\frac{1}{4}}$，$S=(\dfrac{2\pi J}{\rho})^{\frac{1}{2}}$;

当$b=\dfrac{\sqrt{5}}{3}a$时，$a=(\dfrac{18J}{5\sqrt{5}\rho\pi})^{\frac{1}{4}}$，$S=(\dfrac{2\pi J}{\sqrt{5}\rho})^{\frac{1}{2}}.$

$$J=\frac{ab\pi\rho}{4}(5a^2-3b^2)=\frac{\pi\rho}{4}(5a^3b-3ab^3)\geq\frac{\pi\rho}{4}(5a^3b-3a^3b)=\frac{\pi\rho}{2}a^3b\ \Rightarrow b\leq\frac{2J}{\pi\rho}a^{-3}$$

当$a\to+\infty$时，$b=O(a^{-3})$，所以$\lim\limits_{a\to+\infty}S=0.$

故椭圆的面积不存在最大值和最小值，且$0<S<(\dfrac{2\pi J}{\rho})^{\frac{1}{2}}.$

五、（12分）



中国大学MOOC

(2012决赛, 12分) 设连续可微函数$z=z(x,y)$由方程$F(xz-y,x-yz)=0$(其中$F(u,v)$有连续的偏导数)唯一确定，L为正向单位圆周.

试求：$I=\oint_L (xz^2+2yz)\mathrm{d}y-(2xz+yz^2)\mathrm{d}x.$

解　令$P(x,y)=-2xz-yz^2$，$Q(x,y)=xz^2+2yz$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2(xz+y)\frac{\partial z}{\partial x}+2(x+yz)\frac{\partial z}{\partial y}+2z^2.$$

利用格林公式得 $I=2\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left[(xz+y)\frac{\partial z}{\partial x}+(x+yz)\frac{\partial z}{\partial y}+z^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

方程$F(xz-y,x-yz)=0$对x求导，得到 $F_u(x\frac{\partial z}{\partial x}+z)+F_v(1-y\frac{\partial z}{\partial x})=0,$

解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{zF_u+F_v}{xF_u-yF_v}.$

$z=z(x,y)$由方程$F(xz-y,x-yz)=0$确定，L为正向单位圆周.

试求：$I=\oint_L (xz^2+2yz)\mathrm{d}y-(2xz+yz^2)\mathrm{d}x.$

$$I=2\iint_{x^2+y^2\le 1}\left[(xz+y)\frac{\partial z}{\partial x}+(x+yz)\frac{\partial z}{\partial y}+z^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{zF_u+F_v}{xF_u-yF_v}.$$

同样，可得$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{F_u+zF_v}{xF_u-yF_v}$，

$$(xz+y)\frac{\partial z}{\partial x}+(x+yz)\frac{\partial z}{\partial y}=z(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y})+(y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y})$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z(-xF_u+yF_v)+(yF_u-xF_v)}{xF_u-yF_v}=\frac{yF_u-xF_v}{xF_u-yF_v}-z,$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z(-yF_u+xF_v)+(xF_u-yF_v)}{xF_u-yF_v}=1-\frac{z(yF_u-xF_v)}{xF_u-yF_v},$$

$z=z(x,y)$由方程$F(xz-y,x-yz)=0$确定，L为正向单位圆周.

试求：$I=\oint_L (xz^2+2yz)\mathrm{d}y-(2xz+yz^2)\mathrm{d}x.$

$$I=2\iint_{x^2+y^2\le 1}\left[(xz+y)\frac{\partial z}{\partial x}+(x+yz)\frac{\partial z}{\partial y}+z^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{yF_u-xF_v}{xF_u-yF_v}-z,$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=1-\frac{z(yF_u-xF_v)}{xF_u-yF_v},$$

$$(xz+y)\frac{\partial z}{\partial x}+(x+yz)\frac{\partial z}{\partial y}+z^2$$

$$=z(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y})+(y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y})+z^2$$

$$=z(\frac{yF_u-xF_v}{xF_u-yF_v}-z)+1-\frac{z(yF_u-xF_v)}{xF_u-yF_v}+z^2=1-z^2+z^2=1.$$

故 $\oint_L (xz^2+2yz)\mathrm{d}y-(2xz+yz^2)\mathrm{d}x=2\iint_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi.$



六、(本题(1) 6分，(2，10分，共16分)

中国大学MOOC

(2012决赛,16分) (1) 求解微分方程 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xy = x\mathrm{e}^{x^2}, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

(2) 如$y = f(x)$为上述方程的解，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \dfrac{n}{n^2x^2+1} f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{2}$

解 (1) $y = \mathrm{e}^{\int x\mathrm{d}x}\left(\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{e}^{-\int x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\left(\int x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x + C\right)$

$= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\left(\int x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x + C\right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\left[\int \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + C\right] = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} + C\right)$

$= \mathrm{e}^{x^2} + C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$ 而由$y(0) = 1$，知$C = 0$，从而$f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x) \quad y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)$$

(2) 如$y=f(x)$为上述方程的解，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{n}{n^2x^2+1}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$

（2）注意到$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n=\dfrac{\pi}{2}$，

$f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n[(\mathrm{e}^{x^2}-1)+1]}{n^2x^2+1}\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}(\mathrm{e}^{x^2}-1)\mathrm{d}x+\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{d}x.$$

$\forall\varepsilon>0$，由$\lim\limits_{x\to0}(\mathrm{e}^{x^2}-1)=0$知$\exists\delta>0$，$\forall 0<x<\delta$时，有$\left|\mathrm{e}^{x^2}-1\right|<\dfrac{1}{\pi}\varepsilon$，

$$\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}(\mathrm{e}^{x^2}-1)\mathrm{d}x=\int_0^\delta \frac{n}{n^2x^2+1}(\mathrm{e}^{x^2}-1)\mathrm{d}x+\int_\delta^1 \frac{n}{n^2x^2+1}(\mathrm{e}^{x^2}-1)\mathrm{d}x$$

(2) 如$y=f(x)$为上述方程的解，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{n}{n^2x^2+1}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$

$0<x<\delta$时，有$\left|\mathrm{e}^{x^2}-1\right|<\dfrac{\varepsilon}{\pi}$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$

$$\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}(\mathrm{e}^{x^2}-1)\mathrm{d}x=\int_0^\delta \frac{n}{n^2x^2+1}(\mathrm{e}^{x^2}-1)\mathrm{d}x+\int_\delta^1 \frac{n}{n^2x^2+1}(\mathrm{e}^{x^2}-1)\mathrm{d}x$$

$$\le\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^\delta \frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{d}x+(\mathrm{e}-1)\int_\delta^1 \frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{d}x \le\frac{\varepsilon}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}+(\mathrm{e}-1)\frac{n}{n^2\delta^2+1}(1-\delta)$$

$$\le\frac{1}{2}\varepsilon+(\mathrm{e}-1)\frac{n}{n^2\delta^2+1}$$

$\exists N$，$\forall n>N$时，$\dfrac{n}{n^2\delta^2+1}<\dfrac{\varepsilon}{2(\mathrm{e}-1)}$，

因此 $\int_0^1 \dfrac{n}{n^2x^2+1}(\mathrm{e}^{x^2}-1)\mathrm{d}x<\dfrac{1}{2}\varepsilon+\dfrac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{n}{n^2x^2+1}(\mathrm{e}^{x^2}-1)\mathrm{d}x=0.$

(2) 如$y=f(x)$为上述方程的解，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{n}{n^2x^2+1}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$

$$\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}(\mathrm{e}^{x^2}-1)\mathrm{d}x+\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{d}x$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}(\mathrm{e}^{x^2}-1)\mathrm{d}x=0 \qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2},$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{n}{n^2x^2+1}f(x)\mathrm{d}x$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}(\mathrm{e}^{x^2}-1)\mathrm{d}x+\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

中国大学MOOC



END



中国大学MOOC