全国大学生
数学竞赛



第3届预赛

中国大学MOOC

一、计算下列各题

(本题共4个小题，每小题6分，共24分)

(要求写出重要步骤)

第1题



中国大学MOOC

(2011预赛,6分)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2\left[1-\ln(1+x)\right]}{x}$ $\dfrac{0}{0}$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-\mathrm{e}^2\left[1-\ln(1+x)\right]}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^2\ln(1+x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-\mathrm{e}^2}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^2\ln(1+x)}{x}$

$x\to 0$时，$\ln(1+x)\sim x$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-\mathrm{e}^2}{x}=\mathrm{e}^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}-1}{x}$

$u\to 0$时，$\mathrm{e}^u-1\sim u$

$=\mathrm{e}^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}{x}=2\mathrm{e}^2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2\left[1-\ln(1+x)\right]}{x}$

$$=2\mathrm{e}^2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$=2\mathrm{e}^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\mathrm{e}^2\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(1+x)}=-\mathrm{e}^2,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^2\ln(1+x)}{x}=\mathrm{e}^2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\mathrm{e}^2,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2(1-\ln(1+x))}{x}=-\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^2=0$

一、计算下列各题

(本题共4个小题，每小题6分，共24分)

(要求写出重要步骤)

第2题



中国大学MOOC

(2011预赛,6分) 设$a_n=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^n}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解　若$\theta=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

若$\theta\neq0$，则当n充分大，使得$2^n>|k|$时

$$a_n=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^n}$$

$$=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^n}\cdot2\sin\frac{\theta}{2^n}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

$$=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

(2011预赛,6分) 设$a_n=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^n}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

$$=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

$$=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\sin\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{2^2\sin\frac{\theta}{2^n}}=\cdots=\frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}},$$

这时,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}=\frac{\sin\theta}{\theta}.$

一、计算下列各题

(本题共4个小题，每小题6分，共24分)

(要求写出重要步骤)

第3题

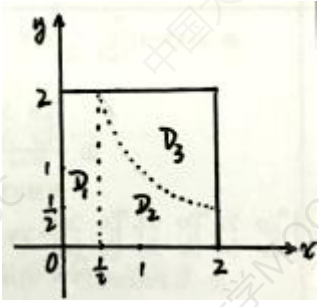


中国大学MOOC

(2011预赛，6分) 求$\iint\limits_D \operatorname{sgn}(xy-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中区域$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$.

解 设$D_1=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le\frac{1}{2}\ ,\ 0\le y\le 2\right\}$，$D_2=\left\{(x,y)\middle|\frac{1}{2}\le x\le 2\ ,\ 0\le y\le\frac{1}{x}\right\}$，

$D_3=\left\{(x,y)\middle|\frac{1}{2}\le x\le 2\ ,\ \frac{1}{x}\le y\le 2\right\}$，



$$\iint\limits_{D_1\cup D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\times 2+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=1+2\ln 2,$$

$$\iint\limits_{D_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(2-\frac{1}{2})\times 2-\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3-2\ln 2$$

$$\iint\limits_{D}\operatorname{sgn}(xy-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_1\cup D_2}(-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2-4\ln 2$$

一、计算下列各题

(本题共4个小题，每小题6分，共24分)

(要求写出重要步骤)

第4题



中国大学MOOC

(2011预赛,6分)

求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$的和函数，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}$的和.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{2n-1}\left|x^2\right|=\frac{1}{2}\left|x^2\right|<1,$

解得$|x|<\sqrt{2},$ 其收敛区间为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2},$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2}=S(\frac{1}{\sqrt{2}})$

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}t^{2n-2}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-1}=\frac{x}{2-x^2}.$$

于是 $S(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{\left(2-x^2\right)^2}$， $x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right).$

求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$的和函数，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}$的和.

$$S(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'=\frac{2+x^2}{\left(2-x^2\right)^2},\quad x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right).$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2}=S(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{10}{9}.$

二、(本题两问，每问8分，共16分)



中国大学MOOC

(2011预赛,16分) 设$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$为数列，a，λ为有限数，求证：

(1) 如果$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$

(2) 如果存在正整数p，使得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p} - a_n\right) = \lambda$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = \dfrac{\lambda}{p}.$

分析 $$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| = \left|\frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n}\right|$$

$$= \left|\frac{(a_1 - a) + \cdots + (a_{N_1} - a)}{n} + \frac{(a_{N_1+1} - a) + \cdots + (a_n - a)}{n}\right|$$

$$\le \left|\frac{(a_1 - a) + \cdots + (a_{N_1} - a)}{n}\right| + \left|\frac{(a_{N_1+1} - a) + \cdots + (a_n - a)}{n}\right| < \varepsilon$$

求证：(1) 如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$

(2) 如果存在正整数p，使得$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p}-a_n\right)=\lambda$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}.$

证 (1) 根据定义$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，即$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in\mathbf{N}$，当$n>N_1$时，$|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}.$

由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\exists M>0$，使得$|a_n|\le M$，

从而$\left|\dfrac{(a_1-a)+\cdots+(a_{N_1}-a)}{n}\right|=\left|\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}-N_1a}{n}\right|$

$\le\dfrac{|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{N_1}|+N_1|a|}{n}\le\dfrac{N_1(M+|a|)}{n}$

取$N_2=\left[\dfrac{2N_1(M+|a|)}{\varepsilon}\right]+1$，则$\exists N_2\in\mathbf{N}$，当$n>N_2$时，$\dfrac{N_1(M+|a|)}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}.$

求证：(1) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_1 \in \mathbf{N}$，当 $n > N_1$ 时，$|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$；

$\exists N_2 \in \mathbf{N}$，当 $n > N_2$ 时，$\left|\dfrac{(a_1 - a) + \cdots + (a_{N_1} - a)}{n}\right| < \dfrac{N_1(M + |a|)}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}.$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时，有

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| \le \left|\frac{(a_1 - a) + \cdots + (a_{N_1} - a)}{n}\right| + \left|\frac{(a_{N_1+1} - a) + + \cdots + (a_n - a)}{n}\right|$$

$$\le \frac{N_1(M + |a|)}{n} + \frac{n - N_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \qquad \text{所以 } \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

求证：(1) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$

(2) 如果存在正整数 p，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p} - a_n\right) = \lambda$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = \dfrac{\lambda}{p}.$

(2) 对于 $i = 0,1,\cdots,\ p-1$，令 $A_n^{(i)} = a_{(n+1)p+i} - a_{np+i}$，易知 $\left\{A_n^{(i)}\right\}$ 为 $\left\{a_{n+p} - a_n\right\}$ 的子列.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p} - a_n\right) = \lambda$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n^{(i)} = \lambda$，　　从而 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A_1^{(i)} + A_2^{(i)} + \cdots + A_n^{(i)}}{n} = \lambda,$

$$
\begin{aligned}
&A_1^{(i)} + A_2^{(i)} + \cdots + A_n^{(i)} \\
=&\left[a_{2p+i} - a_{p+i}\right] + \left[a_{3p+i} - a_{2p+i}\right] + \left[a_{4p+i} - a_{3p+i}\right] + \cdots \\
&+ \left[a_{np+i} - a_{(n-1)p+i}\right] + \left[a_{(n+1)p+i} - a_{np+i}\right] = a_{(n+1)p+i} - a_{p+i},
\end{aligned}
$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{(n+1)p+i} - a_{p+i}}{n} = \lambda.$

求证：(1) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$

(2) 如果存在正整数 p，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_{n+p} - a_n\right) = \lambda$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = \dfrac{\lambda}{p}.$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{(n+1)p+i} - a_{p+i}}{n} = \lambda$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{p+i}}{(n+1)p+i} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{(n+1)p+i} - a_{p+i}}{(n+1)p+i} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{(n+1)p+i} - a_{p+i}}{n} \cdot \frac{n}{(n+1)p+i} = \frac{\lambda}{p}$$

取正整数 $m = (n+1)p + i$，则 $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{a_m}{m} = \dfrac{\lambda}{p},$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = \dfrac{\lambda}{p}.$

三、（15分）



中国大学MOOC

(2011预赛,15分)

设函数$f(x)$在区间$[-1,1]$上具有连续的三阶导数，且$f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$.求证：在开区间$(-1,1)$内至少存在一点x_0，使得$f'''(x_0)=3$.

证　由麦克劳林公式，得

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3,\quad \eta\text{介于0与}x\text{之间},\quad x\in[-1,1].$$

取$x=1$得　$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)+\frac{1}{3!}f'''(\eta_1),\quad 0<\eta_1<1,$

取$x=-1$，得　$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)-\frac{1}{3!}f'''(\eta_2),\quad -1<\eta_2<0.$

两式相减，得　$f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6.$　即　$\frac{1}{2}\left[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)\right]=3.$

设函数$f(x)$在区间$[-1,1]$上具有连续的三阶导数，且$f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$.求证：在开区间$(-1,1)$内至少存在一点x_0，使得$f'''(x_0)=3$.

即 $\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]=3.$

由于$f'''(x)$在闭区间$[-1,1]$上连续，因此$f'''(x)$在闭区间$[\eta_1,\eta_2]$上有最大值M和最小值m，从而 $m\le\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]\le M.$

再由连续函数的介值定理，至少存在一点$x_0\in[\eta_1,\eta_2]\subset(-1,1)$，

使得 $f'''(x_0)=\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]=3.$

四、（15分）



中国大学MOOC

(2011预赛,15分)

在平面上，有一条从点$(a,0)$向右的射线，其线密度为ρ. 在点$(0,\ h)$处（其中$h>0$）有一质量为m的质点，求射线对该质点的引力.

解　在x轴的x处取一小段$\mathrm{d}x$，其质量是$\rho\mathrm{d}x$，到质点的距离为$\sqrt{h^2+x^2}$，这一小段与质点的引力是$\mathrm{d}F=\dfrac{Gm\rho\mathrm{d}x}{h^2+x^2}$（其中$G$为万有引力常数）.

引力在水平方向的分量为$\mathrm{d}F_x=\dfrac{Gm\rho\mathrm{d}x}{h^2+x^2}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}=\dfrac{Gm\rho x\mathrm{d}x}{\left(h^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，

$$F_x=\int_a^{+\infty}\frac{Gm\rho x\mathrm{d}x}{\left(h^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{Gm\rho}{2}\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(h^2+x^2)}{\left(h^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=-Gm\rho\left(h^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\Big|_a^{+\infty}=\frac{Gm\rho}{\sqrt{h^2+a^2}}.$$

在平面上，有一条从点$(a,0)$向右的射线，其线密度为ρ.在点$(0,\ h)$处（其中$h>0$）有一质量为m的质点，求射线对该质点的引力.

$\mathrm{d}F$在竖直方向的分量为$\mathrm{d}F_y=-\dfrac{Gm\rho h\mathrm{d}x}{\left(h^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，　　令$x=h\tan t$

$$F_y=\int_a^{+\infty}-\frac{Gm\rho h\mathrm{d}x}{\left(h^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=-\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{Gm\rho h^2\sec^2 t}{h^3\sec^3 t}\mathrm{d}t=-\frac{Gm\rho}{h}\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{Gm\rho}{h}\sin t\Big|_{\arctan\frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{Gm\rho}{h}\left(1-\sin\arctan\frac{a}{h}\right)=\frac{Gm\rho}{h}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}-1\right).$$

所求引力向量为$\mathbf{F}=\left(F_x,\ F_y\right)$.

五、（15分）



中国大学MOOC

1.(2011预赛, 15分) 设$z=z(x,y)$是由方程$F(z+\frac{1}{x},z-\frac{1}{y})=0$确定的隐函数，且具有连续的二阶偏导数，求证：

(1) $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=1$; (2) $x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2=0.$

解 (1) 对方程两边关于x求导$(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{x^2})F_1^{'}+\frac{\partial z}{\partial x}F_2^{'}=0$, 解得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{F_1^{'}}{x^2(F_1^{'}+F_2^{'})}$

对方程两边关于y求导$\frac{\partial z}{\partial y}F_1^{'}+(\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y^2})F_2^{'}=0$, 解得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-F_2^{'}}{y^2(F_1^{'}+F_2^{'})}$,

所以 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2F_1^{'}}{x^2(F_1^{'}+F_2^{'})}-\frac{-y^2F_2^{'}}{y^2(F_1^{'}+F_2^{'})}=\frac{F_1^{'}}{F_1^{'}+F_2^{'}}+\frac{F_2^{'}}{F_1^{'}+F_2^{'}}=1.$ ①

(2011预赛, 15分) 设$z=z(x,y)$是由方程$F(z+\frac{1}{x},z-\frac{1}{y})=0$确定的隐函数，且具有连续的二阶偏导数，求证：$x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2=0.$

(2) 将①式再关于x求导得 $2x\frac{\partial z}{\partial x}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0$

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=1. \qquad ①$$

$$\Rightarrow x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-2x\frac{\partial z}{\partial x} \qquad ②$$

将①式再关于y求导得 $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2y\frac{\partial z}{\partial y}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \Rightarrow x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2y\frac{\partial z}{\partial y}$ ③

②$\times x$+③$\times y$得 $x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2x^2\frac{\partial z}{\partial x}+2y^2\frac{\partial z}{\partial y}=-2(x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y})=-2$

从而 $x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2=0.$

六、（15分）



中国大学MOOC

(2011预赛，15分) 设函数$f(x)$连续，a、b、c为常数，Σ是单位球面$x^2+y^2+z^2=1$，记第一型曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma} f(ax+by+cz)\mathrm{d}S$.

求证：$I=2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u)\mathrm{d}u$.

解　由Σ的面积为4π可知：当a,b,c都为零时，等式成立.

$$\iint\limits_{\Sigma} f(ax+by+cz)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma} f(0)\mathrm{d}S=f(0)\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=4\pi f(0),$$

$$2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u)\mathrm{d}u=2\pi\int_{-1}^{1} f(0)\mathrm{d}u=4\pi f(0);$$

当a,b,c不全为零时，可知：

原点到平面$ax+by+cz+d=0$的距离是$\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

$\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$，$I=\iint\limits_{\Sigma} f(ax+by+cz)\mathrm{d}S$. 求证：$I=2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u)\mathrm{d}u$.

设平面$P_u: u=\dfrac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$,其中$u$固定，则$|u|$是原点到平面$P_u$的距离，

从而$-1\le u\le 1$.

被积函数取值为$f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u)$,

原点到$P_u: ax+by+cz-\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u=0$

的距离为$\dfrac{|-\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=|u|$

两平面P_u和$P_{u+\mathrm{d}u}$截单位球Σ的截下的部分，这部分摊开可以看成一个细长条.这个细长条的长是$2\pi\sqrt{1-u^2}$,宽是$\dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$,它的面积是$2\pi\mathrm{d}u$,得证.

END



中国大学MOOC