全国大学生
数学竞赛



第2届决赛

中国大学MOOC

一、计算下列各题

(本题共3个小题，每小题5分，共15分)

(要求写出重要步骤)

第1题



中国大学MOOC

(2011决赛,5分) 求极限: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

1^{∞}

$u\to 0$时, $\ln(1+u)\sim u$

$x\to 0$时, $1-\cos x\sim \dfrac{1}{2}x^2$

解法一 原式 $=\exp\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\cos x}\ln\dfrac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\ln\left[1+\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\cdot\frac{\sin x-x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3}{\frac{1}{2}x^2\cdot x}=-\frac{1}{3}$$

$\sin x=x-\dfrac{1}{3!}x^3+o(x^3)$

$x\to 0$时, $\sin x-x\sim -\dfrac{1}{6}x^3$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$.

求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

1^{∞}

$u\to 0$时，$\ln(1+u)\sim u$

$x\to 0$时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$

解法二 原式 $=\exp\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\cos x}\ln\dfrac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\ln\left[1+\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\cdot\frac{\sin x-x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\frac{1}{2}x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\frac{3}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{\frac{3}{2}x^2}=-\frac{1}{3}$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$.

一、计算下列各题

(本题共3个小题，每小题5分，共15分)

(要求写出重要步骤)

第2题



中国大学MOOC

(2011决赛,5分) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$;

解　因为 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}+\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{n}}+\cdots+\dfrac{1}{1+\dfrac{n}{n}}\right]\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{i}{n}}\cdot\dfrac{1}{n}$

取 $\xi_i=\dfrac{i}{n}$，则得被积函数为 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，积分区间 $[0,1]$，

于是 $I=\int_0^1\dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2.$

一、计算下列各题

(本题共3个小题，每小题5分，共15分)

(要求写出重要步骤)

第3题



中国大学MOOC

(2011决赛,5分) 已知$\begin{cases} x=\ln(1+\mathrm{e}^{2t}), \\ y=t-\arctan \mathrm{e}^{t}, \end{cases}$ 求$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{1-\dfrac{\mathrm{e}^{t}}{1+\mathrm{e}^{2t}}}{\dfrac{2\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^{2t}}}=\dfrac{1+\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}}{2\mathrm{e}^{2t}}=\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2t}+1-\mathrm{e}^{-t}\right),$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2t}+1-\mathrm{e}^{-t}\right)\right)}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\dfrac{1}{2}\left(-2\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-t}\right)}{\dfrac{2\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^{2t}}}$$

$$=\frac{1}{4}\left(-2\mathrm{e}^{-4t}+\mathrm{e}^{-3t}-2\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-t}\right)$$

二、（10分）



中国大学MOOC

(2011决赛,10分)

求方程$(2x+y-4)\mathrm{d}x+(x+y-1)\mathrm{d}y=0$的通解.

解　所给方程改写为$(2x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)+(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)-(4\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)=0$,

即　$\mathrm{d}\left(x^2+\frac{1}{2}y^2\right)+\mathrm{d}(xy)-\mathrm{d}(4x+y)=0.$

即　$\mathrm{d}\left[x^2+\frac{1}{2}y^2+xy-(4x+y)\right]=0$

故所求通解为　$x^2+\frac{1}{2}y^2+xy-(4x+y)=C.$

三、（15分）



中国大学MOOC

(2011决赛,15分) 设函数$f(x)$在$x=0$的某邻域内有二阶连续导数，且$f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$不为零. 证明：存在唯一一组实数k_1，k_2，k_3，使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)}{h^2}=0.$$

解 $0=\lim_{h\to 0}\left[k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)\right]=\left(k_1+k_2+k_3-1\right)f(0).$

因$f(0)\neq 0$，所以 $k_1+k_2+k_3-1=0$ ①

已知条件$\lim_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)}{h}}{h}=0.$

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[k_1 f'(h)+2k_2 f'(2h)+3k_3 f'(3h)\right]=\left(k_1+2k_2+3k_3\right)f'(0),$$

设函数$f(x)$在$x=0$的某邻域内有二阶连续导数，且$f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$不为零. 证明：存在唯一一组实数k_1，k_2，k_3，使得$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)}{h^2}=0.$

$$0=\left(k_1+2k_2+3k_3\right)f'(0),$$

因$f'(0)\neq 0$，所以 $k_1+2k_2+3k_3=0$ ②

再由$0=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)}{h^2}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{k_1 f'(h)+2k_2 f'(2h)+3k_3 f'(3h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[k_1 f''(h)+4k_2 f''(2h)+9k_3 f''(3h)\right]=\frac{1}{2}\left(k_1+4k_2+9k_3\right)f''(0).$$

因$f''(0)\neq 0$，所以$k_1+4k_2+9k_3=0$ ③

设函数$f(x)$在$x=0$的某邻域内有二阶连续导数，且$f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$不为零. 证明：存在唯一一组实数k_1，k_2，k_3，使得$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)}{h^2}=0.$

因此k_1，k_2，k_3应满足线性方程组 $\begin{cases} k_1+k_2+k_3=1 \\ k_1+2k_2+3k_3=0 \\ k_1+4k_2+9k_3=0 \end{cases}$

因其系数行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}=2\neq 0,$ 所以方程组有唯一解.

所以存在唯一一组实数k_1，k_2，k_3，使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)}{h^2}=0.$$

四、（17分）



中国大学MOOC

(2011决赛, 17分) 设$\Sigma_1: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, 其中$a>b>c>0$, $\Sigma_2: z^2=x^2+y^2$, Γ为Σ_1和Σ_2的交线. 求椭球面Σ_1在Γ上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值.

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

解　椭球面Σ_1上任意一点$P(x,y,z)$处的的切平面方程是

$$\frac{x}{a^2}(X-x)+\frac{y}{b^2}(Y-y)+\frac{z}{c^2}(Z-z)=0,$$

由$P(x,y,z)\in\Sigma_1$, 于是它到原点的距离

$$d(x,y,z)=\frac{\left|\dfrac{x}{a^2}(0-x)+\dfrac{y}{b^2}(0-y)+\dfrac{z}{c^2}(0-z)\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{x}{a^2}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b^2}\right)^2+\left(\dfrac{z}{c^2}\right)^2}}=\frac{\left|\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right|}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}}.$$

(2011决赛, 17分) 设$\Sigma_1: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, 其中$a>b>c>0$, $\Sigma_2: z^2=x^2+y^2$, Γ为Σ_1和Σ_2的交线. 求椭球面Σ_1在Γ上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值.

$$d(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}+\dfrac{z^2}{c^4}}}.$$

作拉格朗日函数

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)+\mu(x^2+y^2-z^2),$$

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)+\mu(x^2+y^2-z^2),$$

令
$$\begin{cases} F_x=2\left(\frac{1}{a^4}+\frac{\lambda}{a^2}+\mu\right)x=0 \\ F_y=2\left(\frac{1}{b^4}+\frac{\lambda}{b^2}+\mu\right)y=0 \\ F_z=2\left(\frac{1}{c^4}+\frac{\lambda}{c^2}-\mu\right)z=0 \\ F_\lambda=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \\ F_\mu=x^2+y^2-z^2=0 \end{cases},$$

由第一个方程得 $x=0$,

代入后两个方程得 $y=\pm z=\pm\dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$;

同理，由第二个方程得 $y=0$,

代入后两个方程得 $x=\pm z=\pm\dfrac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}$,

驻点：$(0,\dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}},\pm\dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}})$,

$(\dfrac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}},0,\pm\dfrac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}})$

$$\left.\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right|_{(0,\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}},\pm\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}})}=\frac{b^4+c^4}{b^2c^2(b^2+c^2)},$$

$$\left.\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right|_{(\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}},0,\pm\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}})}=\frac{a^4+c^4}{a^2c^2(a^2+c^2)},$$

$$\left.\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right|_{(0,\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}},\pm\frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}})}=\frac{b^4+c^4}{b^2c^2(b^2+c^2)},$$

$$\left.\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right|_{(\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}},0,\pm\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}})}=\frac{a^4+c^4}{a^2c^2(a^2+c^2)},$$

为比较以上两值的大小，设$f(x)=\dfrac{x^4+c^4}{x^2c^2(x^2+c^2)}(0<b<a)$,则

$$f'(x)=\frac{2x(x^4-2c^2x^2-c^4)}{x^4(x^2+c^2)^2}=\frac{2x[(x^2-c^2)^2-2c^4]}{x^4(x^2+c^2)^2}=\frac{2x(x^2-c^2+\sqrt{2}c^2)(x^2-c^2-\sqrt{2}c^2)}{x^4(x^2+c^2)^2}.$$

如果要$f'(x)>0$,须将原条件$a>b>c>0$加强$a>b>\sqrt{1+\sqrt{2}}c$. 从而得到$f(x)$在$[b,a]$单调增，从而$f(a)>f(b)$.

故原问题的最大值为$bc\sqrt{\dfrac{b^2+c^2}{b^4+c^4}}$，最小值为$ac\sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{a^4+c^4}}$.

五、（16分）



中国大学MOOC

(2011决赛，16分) 已知S是空间曲线$\begin{cases} x^2+3y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$,绕$y$轴旋转形成的椭球面的上半部分$(z\geq 0)$(取上侧)，$\Pi$是$S$在点$P(x,y,z)$处的切平面，$\rho(x,y,z)$是原点到切平面$\Pi$的距离，$\lambda$，$\mu$，$\omega$表示$S$的正法向的方向余弦.计算：

(1)$\iint\limits_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$;　　(2)$\iint\limits_S z(\lambda x+3\mu y+\omega z)\mathrm{d}S$.

解 (1)由题设，S的方程为$x^2+3y^2+z^2=1, z\geq 0$.

设(X,Y,Z)为切平面Π上任意一点，

则Π的方程为$x(X-x)+3y(Y-y)+z(Z-z)=0$　即　$xX+3yY+zZ=1$

原点到平面Π的距离公式以及$P(x,y,z)\in S$得

$$\rho(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+9y^2+z^2}}=(1+6y^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

求 $(1)\iint\limits_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$；$(2)\iint\limits_S z(\lambda x+3\mu y+\omega z)\mathrm{d}S$.

S：$x^2+3y^2+z^2=1, z\geq 0.$

由S：$z=\sqrt{1-x^2-3y^2}$知 $z_x=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-3y^2}}, z_y=-\frac{3y}{\sqrt{1-x^2-3y^2}}$

$$\Rightarrow \mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^{\,2}+z_y^{\,2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{1+6y^2}}{\sqrt{1-x^2-3y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

又S在xOy平面上的投影为$D_{xy}: x^2+3y^2\leq 1$,故

$$\iint\limits_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1-x^2-3y^2}\cdot\frac{1}{(1+6y^2)^{-\frac{1}{2}}}\frac{\sqrt{1+6y^2}}{\sqrt{1-x^2-3y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}(1+6y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_{xy}}6y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_1+I_2$$

求 $(1)\iint\limits_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$；$(2)\iint\limits_S z(\lambda x+3\mu y+\omega z)\mathrm{d}S$.

$$I_1=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}r\sin\theta\end{cases}$(广义极坐标),

$D_{xy}:x^2+3y^2\le 1$

$$I_2=\iint\limits_{D_{xy}}6y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=6\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{3}r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{2\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

$$\therefore\quad\iint\limits_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_{xy}}6y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

计算：(2)$\iint_S z(\lambda x+3\mu y+\omega z)\mathrm{d}S$.

(1) $\iint_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}(1+6y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

(2)由于S：$x^2+3y^2+z^2=1$，$z\geq 0$ 上侧，故单位正法向量

$$\vec{n}=\{\frac{x}{\sqrt{x^2+(3y)^2+z^2}},\frac{3y}{\sqrt{x^2+(3y)^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+(3y)^2+z^2}}\},$$

所以$\lambda=\frac{x}{\sqrt{x^2+(3y)^2+z^2}}$，$\mu=\frac{3y}{\sqrt{x^2+(3y)^2+z^2}}$，$\omega=\frac{z}{\sqrt{x^2+(3y)^2+z^2}}$，

$$\iint_S z(\lambda x+3\mu y+\omega z)\mathrm{d}S=\iint_S z\cdot\frac{x^2+9y^2+z^2}{\sqrt{x^2+9y^2+z^2}}\mathrm{d}S$$

$\rho(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+9y^2+z^2}}$

$$=\iint_S z\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x^2+9y^2+z^2}}}\mathrm{d}S=\iint_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$

六、（12分）



中国大学MOOC

(2011决赛,12分)

设$f(x)$是在$(-\infty,+\infty)$内的可微函数，且$|f'(x)|<mf(x)$，其中$0<m<1$.

任取实数a_0，定义$a_n=\ln f(a_{n-1})$，$n=1,2,\cdots$. 证明：$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n-a_{n-1})$绝对收敛.

证 $|a_n-a_{n-1}|=|\ln f(a_{n-1})-\ln f(a_{n-2})|$

$$=\left|\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(a_{n-1}-a_{n-2})\right| \qquad (\xi\text{介于}a_n,\ a_{n-1}\text{之间})$$

$$<m|a_{n-1}-a_{n-2}|<m^2|a_{n-2}-a_{n-3}|<\cdots<m^{n-1}|a_1-a_0|.$$

而$0<m<1$，从而$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n-a_{n-1})$绝对收敛.

七、（15分）



中国大学MOOC

(2011决赛,15分)

是否存在区间$[0,2]$上的连续可微函数$f(x)$，满足

$$f(0)=f(2)=1,|f'(x)|\le 1,\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\le 1?$$ 请说明理由.

解　不存在满足题设条件的函数. 以下用反证法证明.

假设在$[0,2]$上$f(x)$连续、可微，且满足

$$f(0)=f(2)=1,|f'(x)|\le 1,\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\le 1,$$

则对$f(x)$，当$x\in(0,1]$时，由拉格朗日中值定理，

得　$f(x)-f(0)=f'(\xi_1)x$，　$0<\xi_1<x$,

即　$f(x)=1+f'(\xi_1)x$，　$x\in(0,1]$.

是否存在区间$[0,2]$上的连续可微函数$f(x)$，满足

$f(0)=f(2)=1, |f'(x)|\le 1, \left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\le 1$？请说明理由.

利用$|f'(x)|\le 1$，即$-1\le f'(x)\le 1$，得 $f(x)=1+f'(\xi_1)x\ge 1-x$，$x\in(0,1]$.

由$f(0)=1$知，$f(x)\ge 1-x$在$[0,1]$上成立.

同理$x\in[1,2)$时，有 $f(2)-f(x)=f'(\xi_2)(2-x)$，$x<\xi_2<2$,

即 $f(x)=1-f'(\xi_2)(2-x)$，$x\in[1,2)$.

利用$|f'(x)|\le 1$，得 $f(x)\ge 1+(x-2)=x-1$，$x\in[1,2)$

由$f(2)=1$知，$f(x)\ge x-1$在$[1,2]$上成立.

是否存在区间$[0,2]$上的连续可微函数$f(x)$，满足

$f(0)=f(2)=1, |f'(x)|\le 1, \left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\le 1$？请说明理由.

$f(x)\ge 1-x$，$x\in[0,1]$　　$f(x)\ge x-1$，$x\in[1,2]$

所以 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$

$$>\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x+\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}(1-x)^2\Big|_0^1+\frac{1}{2}(x-1)^2\Big|_1^2=1$$

与$\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\le 1$矛盾.　　故不存在满足题设条件的函数.



END



中国大学MOOC