全国大学生
数学竞赛



# 第2届预赛

中国大学MOOC

# 一、计算下列各题

(本题共5个小题，每小题5分，共25分)

(要求写出重要步骤)

**第1题**



中国大学MOOC

(2010预赛, 5分) 设$x_n=(1+a)(1+a^2)\cdot\cdots\cdot(1+a^{2^n})$，其中$|a|<1$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解：将$x_n$恒等变形

$$x_n=(1-a)\cdot(1+a)\cdot(1+a^2)\cdot\cdots\cdot(1+a^{2^n})\cdot\frac{1}{1-a}$$

$$=(1-a^2)\cdot(1+a^2)\cdot\cdots\cdot(1+a^{2^n})\cdot\frac{1}{1-a}$$

$$=(1-a^4)\cdot(1+a^4)\cdot\cdots\cdot(1+a^{2^n})\cdot\frac{1}{1-a}=\cdots=\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}$$

由于$|a|<1$，可知$\lim\limits_{n\to\infty}a^{2^n}=0$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{1-a}$.

# 一、计算下列各题

(本题共5个小题，每小题5分，共25分)

(要求写出重要步骤)

**第2题**



中国大学MOOC

(2010预赛, 5分) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}y$

$$\ln(1+u)=u-\frac{1}{2}u^2+o(u^2)$$

解法一 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\mathrm{e}^{-1}\right]^{x}$

$$\ln(1+\frac{1}{x})=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\left\{x\cdot\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}-1\right]\right\}=\lim_{x\to\infty}\left\{x\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left[x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)-1\right]=\lim_{x\to\infty}x\left[1-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-1\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left[-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=-\frac{1}{2}$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

求 $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} y$

解法二 $\lim\limits_{x\to\infty} \ln y = \lim\limits_{x\to\infty}\left\{x\cdot\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}-1\right]\right\}$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left\{x\left[x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-1\right]\right\}$ 令 $\dfrac{1}{x}=t$

$= \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\frac{1}{t}\ln(1+t)-1}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)-t}{t^2} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}$

$= \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{-t}{2t(1+t)} = -\dfrac{1}{2}$ 所以 $\lim\limits_{x\to\infty} y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

# 一、计算下列各题

(本题共5个小题，每小题5分，共25分)

(要求写出重要步骤)

**第3题**



中国大学MOOC

(2010预赛, 5分) 设$s>0$，求$I_n=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-sx}x^n\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$.

解 $I_n=-\dfrac{1}{s}\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{d}\mathrm{e}^{-sx}=-\dfrac{1}{s}\left[x^n\mathrm{e}^{-sx}\Big|_0^{+\infty}-n\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-sx}x^{n-1}\mathrm{d}x\right]$

$=\dfrac{n}{s}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-sx}x^{n-1}\mathrm{d}x=\dfrac{n}{s}I_{n-1}$,

$s>0$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^n\mathrm{e}^{-sx}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{\mathrm{e}^{sx}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{s\mathrm{e}^{sx}}=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n!}{s^n\mathrm{e}^{sx}}=0$

得 $I_n=\dfrac{n}{s}I_{n-1}=\dfrac{n}{s}\cdot\dfrac{n-1}{s}I_{n-2}$

$=\cdots=\dfrac{n!}{s^{n-1}}I_1=\dfrac{n!}{s^{n+1}}.$

$I_1=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x$

$=-\dfrac{1}{s}x\mathrm{e}^{-sx}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{s^2}$

# 一、计算下列各题

(本题共5个小题，每小题5分，共25分)

(要求写出重要步骤)

**第4题**



中国大学MOOC

1.(2010预赛) 设函数$f(t)$有二阶连续导数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$g(x,y)=f(\frac{1}{r})$，

求$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解　因为$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$，所以　$\frac{\partial g}{\partial x}=f'(\frac{1}{r})\cdot(-\frac{1}{r^2})\cdot\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3}f'(\frac{1}{r})$,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{x}{r^3}f'(\frac{1}{r})\right]=\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\cdot\frac{x}{r}\right)f'(\frac{1}{r})-\frac{x}{r^3}f''(\frac{1}{r})\cdot(-\frac{1}{r^2})\cdot\frac{x}{r}$$

$$=\frac{x^2}{r^6}f''(\frac{1}{r})+\frac{2x^2-y^2}{r^5}f'(\frac{1}{r}),$$

(2010预赛) 设函数$f(t)$有二阶连续导数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$g(x,y)=f(\frac{1}{r})$，求$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{x^2}{r^6}f''(\frac{1}{r})+\frac{2x^2-y^2}{r^5}f'(\frac{1}{r}),$$

利用对称性有 $$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{y^2}{r^6}f''(\frac{1}{r})+\frac{2y^2-x^2}{r^5}f'(\frac{1}{r}),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{x^2+y^2}{r^6}f''(\frac{1}{r})+\frac{x^2+y^2}{r^5}f'(\frac{1}{r})=\frac{1}{r^4}f''(\frac{1}{r})+\frac{1}{r^3}f'(\frac{1}{r}).$$

# 一、计算下列各题

(本题共5个小题，每小题5分，共25分)

(要求写出重要步骤)

**第5题**



中国大学MOOC

(2010预赛, 5分)

求直线$l_1:\begin{cases}x-y=0,\\ z=0\end{cases}$与直线$l_2:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$的距离 .

解　直线$l_1$的对称式方程为$l_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{0}$.　$\vec{l}_1=\{1,1,0\},\vec{l}_2=\{4,-2,-1\}$,

$$\vec{l}_1\times\vec{l}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&0\\4&-2&-1\end{vmatrix}=\{-1,1,-6\}.$$

$P_1=(0,0,0)$、$P_2=(2,1,3)$,

$\vec{a}=\overrightarrow{P_1P_2}=\{2,1,3\}$.

两直线的距离

$$d=\left|\frac{\vec{a}\cdot(\vec{l}_1\times\vec{l}_2)}{\left|\vec{l}_1\times\vec{l}_2\right|}\right|=\frac{|-2+1-18|}{\sqrt{1+1+36}}=\frac{19}{\sqrt{38}}=\sqrt{\frac{19}{2}}.$$

# 二、（15分）



中国大学MOOC

(2010预赛,15分) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有二阶导数，并且 $f''(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\alpha>0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\beta<0$，且存在一点$x_0$，使得$f(x_0)<0$.

证明：方程$f(x)=0$在$(-\infty,+\infty)$恰有两个实根.

证法1　由$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\alpha>0$必有一个充分大的$a>x_0$，使得$f'(a)>0$.

由$f''(x)>0$知$y=f(x)$是凹函数，从而 $f(x)>f(a)+f'(a)(x-a)$，$x>a$.

当$x\to+\infty$时　$f(a)+f'(a)(x-a)\to+\infty$，

故存在$b>a$，使得 $f(b)>f(a)+f'(a)(b-a)>0$.

同样，由$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\beta<0$，必有$c<x_0$，使得$f'(c)<0$.

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有二阶导数，并且$f''(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\alpha>0$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\beta<0$，且存在一点$x_0$，使得$f(x_0)<0$.

证明：方程$f(x)=0$在$(-\infty,+\infty)$恰有两个实根.

由$f''(x)>0$知$y=f(x)$是凹函数，从而 $f(x)>f(c)+f'(c)(x-c)$，$x<c$.

当$x\to-\infty$时， $f(c)+f'(c)(x-c)\to+\infty$，

故存在$d<c$，使得 $f(d)>f(c)+f'(c)(d-c)>0$.

在$[d,x_0]$和$[x_0,b]$利用零点定理，

$\exists x_1\in(d,x_0)$，$x_2\in(x_0,b)$，使得$f(x_1)=f(x_2)=0$.

下面证明方程$f(x)=0$在$(-\infty,+\infty)$只有两个实根.

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有二阶导数，并且$f''(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\alpha>0$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\beta<0$，且存在一点$x_0$，使得$f(x_0)<0$.

证明：方程$f(x)=0$在$(-\infty,+\infty)$恰有两个实根.

用反证法. 假设方程$f(x)=0$在$(-\infty,+\infty)$内有三个实根，

不妨设为 $x_1$，$x_2$，$x_3$且$x_1<x_2<x_3$ .

$f(x)$在区间$[x_1,x_2]$和$[x_2,x_3]$上分别应用罗尔定理，

则各至少存在一点$\xi_1(x_1<\xi_1<x_2)$和$\xi_2(x_2<\xi_2<x_3)$使得$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.

再将$f'(x)$在区间$[\xi_1,\ \xi_2]$上使用罗尔定理，

则至少存在一点$\eta(\xi_1<\eta<\xi_2)$，使$f''(\eta)=0$.

与条件$f''(x)>0$矛盾. 从而方程$f(x)=0$在$(-\infty,+\infty)$不能有多于两个的实根.

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有二阶导数，并且$f''(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\alpha>0$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\beta<0$，且存在一点$x_0$，使得$f(x_0)<0$.

证明：方程$f(x)=0$在$(-\infty,+\infty)$恰有两个实根.

证法2　先证方程$f(x)=0$至少有两个实根.

由$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\alpha>0$，必有一个充分大的$a>x_0$，使得$f'(a)>0$.

因$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有二阶导数，故$f'(x)$及$f''(x)$在$(-\infty,+\infty)$均连续.

由拉格朗日中值定理，对于$x>a$有

$$f(x)-\big[f(a)+f'(a)(x-a)\big]=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$$

$$=f'(\xi)(x-a)-f'(a)(x-a)=\big[f'(\xi)-f'(a)\big](x-a)$$

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有二阶导数，并且$f''(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\alpha>0$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\beta<0$，且存在一点$x_0$，使得$f(x_0)<0$.

证明：方程$f(x)=0$在$(-\infty,+\infty)$恰有两个实根.

$$f(x)-\left[f(a)+f'(a)(x-a)\right]=\left[f'(\xi)-f'(a)\right](x-a)$$

$=f''(\eta)(\xi-a)(x-a)$，其中$a<\xi<x, a<\eta<x$.

注意到$f''(\eta)>0$，则 $f(x)>f(a)+f'(a)(x-a)$，$x>a$

又因$f'(a)>0$，故存在$b>a$，使得 $f(b)>f(a)+f'(a)(b-a)$.

又已知$f(x_0)<0$，由连续函数的介值定理，至少存在一点$x_1(x_0<x_1<b)$使得$f(x_1)=0$，即方程$f(x)=0$在$(x_0,+\infty)$上至少有一个根$x_1$.

设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有二阶导数，并且$f''(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\alpha>0$，$\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\beta<0$，且存在一点$x_0$，使得$f(x_0)<0$.

证明：方程$f(x)=0$在$(-\infty,+\infty)$恰有两个实根.

至少存在一点$x_1(x_0<x_1<b)$使得$f(x_1)=0$，

即方程$f(x)=0$在$(x_0,+\infty)$上至少有一个根$x_1$;

同理可证方程$f(x)=0$在$(-\infty，x_0)$上至少有一个实根$x_2$.

下面证明方程$f(x)=0$在$(-\infty,+\infty)$只有两个实根.(同证法1)

# 三、（15分）



中国大学MOOC

(2010预赛,15分) 设函数$y=f(x)$由参数方程 $\begin{cases} x=2t+t^2, \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $t>-1$所确定，且$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，其中$\psi(t)$具有二阶导数，曲线$y=\psi(t)$与$y=\int_1^{t^2}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u+\dfrac{3}{2\mathrm{e}}$在$t=1$处相切.求函数$\psi(t)$

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{2+2t},\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\psi'(t)}{2+2t}\right)}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{(2+2t)\psi''(t)-2\psi'(t)}{(2+2t)^2}\cdot\frac{1}{2+2t}$$

$$=\frac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3},$$

由题设$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，得$\dfrac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3}=\dfrac{3}{4(1+t)}$,

设函数$y=f(x)$由参数方程 $\begin{cases} x=2t+t^2, \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $t>-1$所确定，且$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，其中$\psi(t)$具有二阶导数，曲线$y=\psi(t)$与$y=\int_1^{t^2}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u+\dfrac{3}{2\mathrm{e}}$在$t=1$处相切.求函数$\psi(t)$

从而 $(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)=3(1+t)^2$，

$$\frac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3}=\frac{3}{4(1+t)},$$

即 $\psi''(t)-\dfrac{1}{1+t}\psi'(t)=3(1+t).$ 设$u=\psi'(t)$，则有$u'-\dfrac{1}{1+t}u=3(1+t),$

故 $u=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t}\left[\int 3(1+t)\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C_1\right]$

$$y=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$=(1+t)\left[\int 3(1+t)(1+t)^{-1}\mathrm{d}t+C_1\right]=(1+t)(3t+C_1),$

$$\psi(t)=\int(1+t)(3t+C_1)\mathrm{d}t=\int[3t^2+(3+C_1)t+C_1]\mathrm{d}t=t^3+\frac{3+C_1}{2}t^2+C_1t+C_2.$$

设函数$y=f(x)$由参数方程 $\begin{cases} x=2t+t^2, \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $t>-1$所确定，且$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，其中$\psi(t)$具有二阶导数，曲线$y=\psi(t)$与$y=\int_1^{t^2}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u+\dfrac{3}{2\mathrm{e}}$在$t=1$处相切.求函数$\psi(t)$

$\psi(t)=t^3+\dfrac{3+C_1}{2}t^2+C_1t+C_2.$　　$\psi'(t)=3t^2+(3+C_1)t+C_1$

由曲线$y=\psi(t)$与$y=\int_1^{t^2}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u+\dfrac{3}{2\mathrm{e}}$在$t=1$处相切知 $\psi(1)=\dfrac{3}{2\mathrm{e}}$，

$\psi'(1)=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{t=1}=2t\mathrm{e}^{-t^4}|_{t=1}=\dfrac{2}{\mathrm{e}}.$　　由此知$C_1=\dfrac{1}{\mathrm{e}}-3$

由$\psi(1)=\dfrac{3}{2\mathrm{e}}$,知$C_2=2.$　　于是　$\psi(t)=t^3+\dfrac{1}{2\mathrm{e}}t^2+(\dfrac{1}{\mathrm{e}}-3)t+2$，$t>-1$

# 四、（15分）



中国大学MOOC

(2010预赛,15分) 设$a_n > 0$，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$,证明:(1)当$\alpha > 1$时，级数$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$收敛;

（2）当$\alpha \le 1$时，且$S_n \to \infty (n \to \infty)$时，级数$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$发散

证　令$f(x) = x^{1-\alpha}$，$x \in [S_{n-1},\ S_n]$.　　$f'(x) = (1-\alpha)x^{-\alpha}$,

将$f(x)$在区间$[S_{n-1},\ S_n]$上用拉格朗日中值定理，存在$\xi \in (S_{n-1},\ S_n)$,

使　$f(S_n) - f(S_{n-1}) = f'(\xi)(S_n - S_{n-1})$,　即 $S_n^{1-\alpha} - S_{n-1}^{1-\alpha} = (1-\alpha)\xi^{-\alpha} a_n$.

(1)当$\alpha > 1$时，$\frac{1}{S_n^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} = (1-\alpha)\xi^{-\alpha} a_n$,　　由$\xi < S_n \Rightarrow \frac{1}{\xi} > \frac{1}{S_n}$

当$\alpha > 1$时,$\frac{1}{\xi^{\alpha}} > \frac{1}{S_n^{\alpha}}$,　$\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}} = (\alpha-1)\frac{a_n}{\xi^{\alpha}} \ge (\alpha-1)\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$,

设$a_n>0$，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，证明：(1)当$\alpha>1$时，级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$收敛；

$$T_n=\left(\frac{1}{S_1^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_2^{\alpha-1}}\right)+\left(\frac{1}{S_2^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_3^{\alpha-1}}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right)+\left(\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_{n+1}^{\alpha-1}}\right)=\frac{1}{S_1^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_{n+1}^{\alpha-1}}$$

当$\alpha>1$时，$\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}\le\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right)$

$\left\{\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right\}$的前$n$项和有界，　正项级数$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right)$收敛

$\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}\le\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right)$，根据正项级数比较审敛法知级数$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$收敛.

（2）当$\alpha \le 1$时，且$S_n \to \infty (n \to \infty)$时，级数$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$发散

(2) 当$\alpha = 1$时，因为$a_n > 0$，$S_n$单调递增，所以

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} = \frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{S_{n+2}} + \cdots + \frac{a_{n+p}}{S_{n+p}} \ge \frac{a_{n+1}}{S_{n+p}} + \frac{a_{n+2}}{S_{n+p}} + \cdots + \frac{a_{n+p}}{S_{n+p}}$$

$$= \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}.$$

因为$S_n \to +\infty$，对任意$n$，当$p \in \mathbf{N}, \frac{S_n}{S_{n+p}} < \frac{1}{2}$，

从而 $\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} \ge \frac{1}{2}.$ 所以当$\alpha = 1$时，级数$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$发散.

（2）当$\alpha \le 1$时，且$S_n \to \infty (n \to \infty)$时，级数$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$发散

从而 $\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} \ge \frac{1}{2}.$

所以当$\alpha = 1$时，级数$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$发散.

当$a < 1$时，$S_n \ge S_n^{\alpha} \Rightarrow \frac{1}{S_n} \le \frac{1}{S_n^{\alpha}} \Rightarrow \frac{a_n}{S_n} \le \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$，

由$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n}$发散及比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 发散.

# 五、（15分）



中国大学MOOC

(2010预赛, 15分) 设$l$是过原点、方向为$\{\alpha,\beta,\gamma\}$ (其中$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$)的直线，均匀椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ (其中$0<c<b<a$，密度为1)绕$l$旋转.

(1)求其转动惯量；

(2) 求其转动惯量关于方向$\{\alpha,\beta,\gamma\}$的最大值和最小值.

**解** (1)由转动惯量的定义 $J_l=\iiint_\Omega d^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

设旋转轴 $l$ 的方向向量为 $\vec{\boldsymbol{l}}=\{\alpha,\beta,\gamma\}$，椭球内任意一点$P(x,y,z)$的径向量为 $\vec{\boldsymbol{r}}$，则点 $P$ 到旋转轴 $l$ 的距离平方为

$$d^2=\vec{\boldsymbol{r}}^{\,2}-(\vec{\boldsymbol{r}}\cdot\vec{\boldsymbol{l}})^2=x^2+y^2+z^2-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2$$

$$=(1-\alpha^2)x^2+(1-\beta^2)y^2+(1-\gamma^2)z^2-2\alpha\beta xy-2\beta\gamma yz-2\alpha\gamma xz.$$

(2010预赛, 15分) 设$l$是过原点、方向为$\{\alpha,\beta,\gamma\}$ (其中$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$)的直线，均匀椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ (其中$0<c<b<a$，密度为1)绕$l$旋转.

(1)求其转动惯量；

(2) 求其转动惯量关于方向$\{\alpha,\beta,\gamma\}$的最大值和最小值.

$$J_l=\iiint_\Omega[(1-\alpha^2)x^2+(1-\beta^2)y^2+(1-\gamma^2)z^2-2\alpha\beta xy-2\beta\gamma yz-2\alpha\gamma xz]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

由积分区域的对称性可知

$$\iiint_\Omega(2\alpha\beta xy+2\beta\gamma yz+2\alpha\gamma xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,\qquad \Omega=\left\{(x,y,z)\middle|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\},$$

$$\iiint_\Omega x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x\iint_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1-\frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-a}^{a}x^2\cdot\pi bc(1-\frac{x^2}{a^2})\mathrm{d}x=\frac{4a^3bc\pi}{15},$$

(2010预赛, 15分) 设$l$是过原点、方向为$\{\alpha,\beta,\gamma\}$ (其中$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$)的直线，均匀椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$(其中$0<c<b<a$，密度为1)绕$l$旋转.

(1)求其转动惯量；

(2) 求其转动惯量关于方向$\{\alpha,\beta,\gamma\}$的最大值和最小值.

(或$\iiint_\Omega x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2}a^2r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta\cdot abcr^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{4a^3bc\pi}{15}$)

$$\iiint_\Omega y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4ab^3c\pi}{15},\qquad \iiint_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4abc^3\pi}{15},$$

故 $J_l=\iiint_\Omega d^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4abc\pi}{15}\left[(1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2\right].$

(2) 求其转动惯量关于方向$\{\alpha,\beta,\gamma\}$的最大值和最小值.

$$J_l=\frac{4abc\pi}{15}\left[(1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2\right].$$

（2）考虑目标函数 $V(\alpha,\beta,\gamma)=(1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2$
在约束$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$下的条件极值.

设拉格朗日函数为

$$L(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)=(1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2+\lambda(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1),$$

$$\text{令}\begin{cases}L_\alpha=2\alpha(\lambda-a^2)=0\\ L_\beta=2\beta(\lambda-b^2)=0\\ L_\gamma=2\gamma(\lambda-c^2)=0\\ L_\lambda=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \lambda=b^2\\ \gamma=0\\ \beta^2=1\end{cases}\text{或}\begin{cases}\lambda=a^2\\ \beta=0\\ \gamma=0\\ \alpha^2=1\end{cases}\text{或}\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \lambda=c^2\\ \gamma^2=1\end{cases}$$

(2) 求其转动惯量关于方向$\{\alpha,\beta,\gamma\}$的最大值和最小值.

$$J_l=\frac{4abc\pi}{15}\left[(1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2\right].$$

解得极值点为

$Q_1(0,\pm1,0,b^2)$，$Q_2(\pm1,0,0,a^2)$，$Q_3(0,0,\pm1,c^2)$.

$Q_1(0,\pm1,0,b^2)$：$J_l=\frac{4abc\pi}{15}\left(a^2+c^2\right)$；　$Q_2(\pm1,0,0,a^2)$：$J_l=\frac{4abc\pi}{15}\left(b^2+c^2\right)$；

$Q_3(0,0,\pm1,c^2)$：$J_l=\frac{4abc\pi}{15}\left(a^2+b^2\right)$；　　$a>b>c$

比较可知，绕$z$轴（短轴）的转动惯量最大，为$J_{\max}=\frac{4abc\pi}{15}(a^2+b^2)$；

绕$x$轴（长轴）的转动惯量最小，为$J_{\min}=\frac{4abc\pi}{15}(b^2+c^2)$.

# 六、（15分）



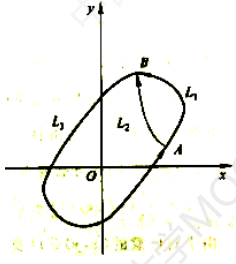
中国大学MOOC

(2005年, 考研真题) 设函数$\varphi(y)$具有连续的导数，在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线$L$上，曲线积分$\oint_L \dfrac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$的值恒为同一常数.

(1) 证明：对右半平面$x>0$内的任意分段光滑简单闭曲线$C$，有

$$\oint_C \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0;$$

(2) 求函数$\varphi(y)$的表达式.




解 (1) 在右半平面$x>0$上任取两点$A$、$B$，以$A$为始点、$B$为终点作任意光滑曲线$L_1$、$L_2$，再以$B$为始点、$A$为终点作围绕原点的光滑曲线$L_3$，如图

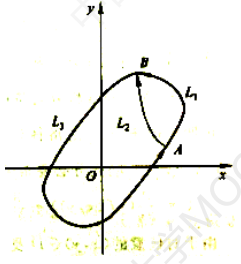
围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线$L$上，曲线积分$\oint_L \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$的值恒为同一常数.(1)证明：对右半平面$x>0$内的任意分段光滑简单闭曲线$C$，有

$$\oint_C \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0;$$

$$\oint_{L_1+L_3} \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=\oint_{L_2+L_3} \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$$

$$\Rightarrow \oint_{L_1} \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=\oint_{L_2} \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$$

$$\Rightarrow \oint_C \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0;$$



(2) 求函数$\varphi(y)$的表达式.

(2) 因为对右半平面$x>0$内的任意分段光滑简单闭曲线$C$，有

$$\oint_C \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0,\ \text{所以}\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},$$

即 $$\frac{2y^5-4x^2y}{(2x^2+y^4)^2}=\frac{\varphi'(y)(2x^2+y^4)-4y^3\varphi(y)}{(2x^2+y^4)^2}$$

$$\Rightarrow 2y^5-4x^2y=(2x^2+y^4)\varphi'(y)-4y^3\varphi(y)$$

$$\Rightarrow 2y^5-4yx^2=[y\varphi'(y)-4\varphi(y)]y^3+2\varphi'(y)x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\varphi'(y)=-2y & \text{由第一式解得}\varphi(y)=-y^2+C,\\ 2y^2=y\varphi'(y)-4\varphi(y) & \text{代入第二式得}C=0,\ \text{所以}\varphi(y)=-y^2.\end{cases}$$

(2010预赛, 15分) 设函数$\varphi(x)$具有连续的导数，在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线$C$上，曲线积分$\oint_C \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$的值为常数.

(1) 设$L$为正向闭曲线$(x-2)^2+y^2=1$，证明：$\oint_L \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0$;

(2) 求函数$\varphi(x)$;

(3) 设$C$是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求$\oint_C \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

(2005年, 考研真题) 设函数$\varphi(y)$具有连续的导数，在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线$L$上，曲线积分$\oint_L \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$的值恒为同一常数.(1) 证明：对右半平面$x>0$内的任意分段光滑简单闭曲线$C$，有$\oint_C \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0$;(2) 求函数$\varphi(y)$的表达式.

已知$\oint_C \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$的值为常数，$C$：围绕原点任意光滑简单闭曲线.

(1) 设$L$为正向闭曲线$(x-2)^2+y^2=1$，证明：$\oint_L \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0$;

解 (1) 设$\oint_C \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=I$，$C$：围绕原点任意光滑简单闭曲线.

设$L_0$为不经过原点的光滑曲线，使得$L_0 \cup L_1^-$(其中$L_1^-$为$L_1$的反向曲线)和$L_0 \cup L_2$分别组成围绕原点的分段光滑闭曲线$C_i\,(i=1,2)$，由曲线积分性质和题设条件

$$\oint_L \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\left[\int_{L_1}+\int_{L_2}\right]\frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$$

$$=\left[\int_{L_2}+\int_{L_0}-\int_{L_0}-\int_{L_1^-}\right]\frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\left[\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\right]\frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=I-I=0$$

(2010预赛, 15分) 设函数$\varphi(x)$具有连续的导数，在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线$C$上，曲线积分$\oint_L \dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$的值为常数.

(1) 设$L(x-2)^2+y^2=1$，证明：$\oint_L \dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0$;

(2) 求函数$\varphi(x)$;

(3) 设$C$是围绕原点的光滑简单正向闭曲线求$\oint_L \dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

(2)设$P(x,y)=\dfrac{2xy}{x^4+y^2}$，$Q(x,y)=\dfrac{\varphi(x)}{x^4+y^2}$. 令$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$,

即$\dfrac{\varphi'(x)(x^4+y^2)-4x^3\varphi(x)}{(x^4+y^2)^2}=\dfrac{2x^5-2xy^2}{(x^4+y^2)^2}$，解得$\varphi(x)=-x^2$.

已知$\oint_C \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$的值为常数，$C$：围绕原点任意光滑简单闭曲线.

(3) 设$C$是围绕原点的光滑简单正向闭曲线，求$\oint_C \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

(3) 设$D$为正向闭曲线$C_\delta: x^4+y^2=\delta^2$所围区域，

$$\oint_C \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\oint_{C_\delta} \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}.$$

利用格林公式和对称性

$$\oint_{C_\delta} \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\oint_{C_\delta} \frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\frac{1}{\delta^2}\oint_{C_\delta} 2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\delta^2}\iint_D(-4x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

END



中国大学MOOC