全国大学生
数学竞赛



第12届决赛

中国大学MOOC

一、填空题

本题满分30分，每小题6分

第1题



中国大学MOOC

2021年5月决赛，6分

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\sin^2\left(1+\dfrac{k}{n}\right)=$ _____.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\sin^2\left(1+\dfrac{k}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}\dfrac{k}{n}\sin^2\left(1+\dfrac{k}{n}\right)=\int_0^1 x\sin^2(1+x)\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1 x\cdot\frac{1}{2}\left[1-\cos 2(1+x)\right]\mathrm{d}x$$

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1 x\cos 2(1+x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int_0^1 x\mathrm{d}\sin\left[2(1+x)\right]$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}x\sin\left[2(1+x)\right]\Big|_0^1+\frac{1}{4}\int_0^1\sin\left[2(1+x)\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sin 4-\frac{1}{8}\cos\left[2(1+x)\right]\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sin 4-\frac{1}{8}\cos 4+\frac{1}{8}\cos 2=\frac{1}{8}(2-2\sin 4-\cos 4+\cos 2).$$

一、填空题

本题满分30分，每小题6分

第2题



中国大学MOOC

2021年5月决赛，6分

设$P_0(1,1,-1)$，$P_1(2,-1,0)$为空间的两点，则函数$u=xyz+\mathrm{e}^{xyz}$在点P_0处沿$\overrightarrow{P_0P_1}$方向的方向导数为_____.

解 $\overrightarrow{P_0P_1}$方向的单位向量为$\vec{l}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$，则$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}},\cos\beta=-\frac{2}{\sqrt{6}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

$$u_x|_{P_0}=yz(1+\mathrm{e}^{xyz})|_{P_0}=-(1+\mathrm{e}^{-1}),\quad u_y|_{P_0}=xz(1+\mathrm{e}^{xyz})|_{P_0}=-(1+\mathrm{e}^{-1}),$$

$$u_z|_{P_0}=xy(1+\mathrm{e}^{xyz})|_{P_0}=1+\mathrm{e}^{-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cos\gamma$$

因此方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial l}|_{P_0}=-(1+\mathrm{e}^{-1})\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}-(1+\mathrm{e}^{-1})\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)+(1+\mathrm{e}^{-1})\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{2}{\sqrt{6}}(1+\mathrm{e}^{-1}).$$

一、填空题

本题满分30分，每小题6分

第3题



中国大学MOOC

2021年5月决赛，6分

记空间曲线$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}(a>0)$，则积分$\oint_\Gamma (1+x)^2\mathrm{d}s=$_____.

解 利用对称性

$$\int_\Gamma (1+x)^2\mathrm{d}s=\int_\Gamma (1+2x+x^2)\mathrm{d}s=\int_\Gamma \mathrm{d}s+2\int_\Gamma x\mathrm{d}s+\int_\Gamma x^2\mathrm{d}s$$

$$=\int_\Gamma \mathrm{d}s+2\cdot\frac{1}{3}\int_\Gamma (x+y+z)\mathrm{d}s+\frac{1}{3}\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$$

$$=\int_\Gamma \mathrm{d}s+0+\frac{1}{3}\int_\Gamma a^2\mathrm{d}s=\left(1+\frac{a^2}{3}\right)\int_\Gamma \mathrm{d}s=2\pi a\left(1+\frac{a^2}{3}\right).$$

一、填空题

本题满分30分，每小题6分

第4题



中国大学MOOC

2021年5月决赛，6分

设矩阵A的伴随矩阵$A^*=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 16 & \\ & & 1\end{bmatrix}$，且$|A|>0$，$ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$，

其中I为单位矩阵，则$B=$_____.

解 由$AA^*=|A|I$及$|A^*|=16$可知$|A|=4$，

$|A^*|=|A|^{n-1}$

$A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^*$

对$ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$两边左乘A^{-1}右乘A得$B=A^{-1}B+3I$，即$(I-A^{-1})B=3I$，

所以$B=3(I-A^{-1})^{-1}=3(I-\dfrac{1}{4}A^*)^{-1}=3\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & & \\ & -3 & \\ & & \frac{3}{4}\end{bmatrix}^{-1}=3\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & & \\ & -\frac{1}{3} & \\ & & \frac{4}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & & \\ & -1 & \\ & & 4\end{bmatrix}$.

一、填空题

本题满分30分，每小题6分

第5题



中国大学MOOC

2021年5月决赛，6分

函数$u=x_1+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\frac{2}{x_3}\ (x_i>0,i=1,2,3)$的所有极值点为_____.

解 利用均值不等式可知$u(x_1,x_2,x_3)\geq 4\sqrt[4]{x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_3}{x_2}\cdot\frac{2}{x_3}}=4\sqrt[4]{2}.$

$$\frac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{abcd}$$

另一方面，$\frac{\partial u}{\partial x_1}=1-\frac{x_2}{x_1^2},\quad \frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{1}{x_1}-\frac{x_3}{x_2^2},\quad \frac{\partial u}{\partial x_3}=\frac{1}{x_2}-\frac{2}{x_3^2}.$

令$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x_1}=0\\ \frac{\partial u}{\partial x_2}=0\\ \frac{\partial u}{\partial x_3}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1-\frac{x_2}{x_1^2}=0 & ①\\ \frac{1}{x_1}-\frac{x_3}{x_2^2}=0 & ②\\ \frac{1}{x_2}-\frac{2}{x_3^2}=0 & ③\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2^{\frac{1}{4}}\\ x_2=2^{\frac{1}{2}}\\ x_3=2^{\frac{3}{4}}\end{cases}$

由①得$x_2=x_1^2$ ④

由③得$x_3^2=2x_2=2x_1^2$ ⑤

④、⑤代入②得$\frac{1}{x_1}-\frac{\sqrt{2}x_1}{x_1^4}=0$

函数$u=x_1+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\frac{2}{x_3}\,(x_i>0,i=1,2,3)$的所有极值点为_____.

接上

④、⑤代入②得 $\frac{1}{x_1}-\frac{\sqrt{2}x_1}{x_1^4}=0$

得唯一驻点$P_0(2^{\frac{1}{4}},2^{\frac{1}{2}},2^{\frac{3}{4}})$,

且u在该点取得极小值$u(P_0)=4\sqrt[4]{2}$.

这是函数唯一的极值，因此u的唯一极值点为$(2^{\frac{1}{4}},2^{\frac{1}{2}},2^{\frac{3}{4}})$.

二、（12分）



中国大学MOOC

2021年5月决赛，12分

求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}\cdot\sqrt[6]{\dfrac{1+3x}{1-3x}}\cdots\sqrt[2n]{\dfrac{1+nx}{1-nx}}-1}{3\pi\arcsin x-(x^2+1)\arctan^3 x}$，其中$n$为正整数.

解 令$f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}\cdot\sqrt[6]{\dfrac{1+3x}{1-3x}}\cdots\sqrt[2n]{\dfrac{1+nx}{1-nx}}$，则$f(0)=1$,

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{3\pi\arcsin x-(x^2+1)\arctan^3 x}\qquad \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot\frac{x}{3\pi\arcsin x-(x^2+1)\arctan^3 x}$$

$$=f'(0)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{3\pi\dfrac{\arcsin x}{x}-(x^2+1)\dfrac{\arctan^3 x}{x}}=\frac{1}{3\pi}f'(0).$$

求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}\cdot\sqrt[6]{\dfrac{1+3x}{1-3x}}\cdots\cdot\sqrt[2n]{\dfrac{1+nx}{1-nx}}-1}{3\pi\arcsin x-(x^2+1)\arctan^3 x}$，其中$n$为正整数.

接上

$$f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}\cdot\sqrt[6]{\frac{1+3x}{1-3x}}\cdots\cdot\sqrt[2n]{\frac{1+nx}{1-nx}},\quad f(0)=1$$

$$\ln f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{4}\ln\frac{1+2x}{1-2x}+\frac{1}{6}\ln\frac{1+3x}{1-3x}+\cdots+\frac{1}{2n}\ln\frac{1+nx}{1-nx},$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{1+2x}+\frac{2}{1-2x}\right)+\cdots+\frac{1}{2n}\left(\frac{n}{1+nx}+\frac{n}{1-nx}\right),$$

所以 $f'(0)=n.$　　原式$=\dfrac{1}{3\pi}f'(0)=\dfrac{n}{3\pi}.$

三、（12分）



中国大学MOOC

2021年5月决赛，12分

求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]x^n$的收敛域.

$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$

解 记$a_n=1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1-n\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+o(\frac{1}{n^2})\right]$

$=\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})$. 当$n\to\infty$时，$a_n\sim\frac{1}{2n}$.

$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2(n+1)}{2n}\cdot\frac{1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1-(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}\right|=1.$ $x=1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

$x=-1$时，判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$的敛散性. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})\right]=0$

为了证明$\{a_n\}$单调递减，令$f(x)=x\ln(1+\frac{1}{x})$，$x\geq 1$,

求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]x^n$的收敛域.

接上

令$f(x)=x\ln(1+\frac{1}{x}),\ x\geq 1,$ 得 $f'(x)=\ln(1+\frac{1}{x})+x\cdot\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}=\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}$

当$a\geq 0$时，$\ln(1+a)>\frac{a}{1+a}$,

令$a=\frac{1}{x}$得$\ln(1+\frac{1}{x})>\frac{1}{1+x}$,

根据拉格朗日中值定理

$$\ln(1+a)-\ln 1=\frac{1}{1+\xi}\cdot a>\frac{a}{1+a},\quad \xi\in(0,a)$$

即$f'(x)>0$，从而$f(x)$在$[1,+\infty)$上递增.

所以$a_n-a_{n+1}=(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>0,$ 这说明$\{a_n\}$单调递减.

根据交错级数审敛法知$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛. 因此幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$的收敛域为$[-1,1)$.

四、（12分）



中国大学MOOC

2021年5月决赛，12分

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$.

(1) 证明：存在互不相同的点x_1，$x_2\in(a,b)$，使得 $f'(x_i)=f(x_i)$，$i=1,2$；

(2) 证明：存在$\xi\in(a,b)$，$\xi\neq x_i$，$i=1,2$，使得 $f''(\xi)=f(\xi)$.

(1)分析 令$G(x)=f(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则$G(a)=G(b)=0$，

由罗尔定理知$\exists\xi\in(a,b)$，使得$G'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=f(\xi)$.

不符合要求，因为结论要求有两个点满足此式.

$$f'(x)=f(x)$$
$$\Rightarrow f(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow f(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=0$$

寻找$G(x_0)=0$，加上$G(a)=G(b)=0$，分别在(a,x_0)、(x_0,b)使用罗尔定理.

$$G(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)-\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t=0,\quad f(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad \text{记}\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

$$\Phi'(x)=\Phi(x)\Rightarrow \ln\Phi(x)=x+\ln C\Rightarrow \mathrm{e}^{-x}\Phi(x)=C,\quad \text{即}\ \mathrm{e}^{-x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=C$$

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，且$f(a)=f(b)=0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$.

(1) 证明：存在互不相同的点x_1，$x_2\in(a,b)$，使得 $f'(x_i)=f(x_i)$，$i=1,2$;

接上

(1)证 令$F(x)=\mathrm{e}^{-x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则$F(a)=F(b)=0$,

对$F(x)$在$[a,b]$上利用罗尔定理，存在$x_0\in(a,b)$，使得$F'(x_0)=0$,

即$f(x_0)=\int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t$.

再令$G(x)=f(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则$G(a)=G(x_0)=F(b)=0$,

对$G(x)$在$[a,x_0]$利用罗尔定理，存在$x_1\in(a,x_0)$，使得$G'(x_1)=0$，即$f'(x_1)=f(x_1)$;

对$G(x)$在$[x_0,b]$利用罗尔定理，存在$x_2\in(x_0,b)$，使得$G'(x_2)=0$，即$f'(x_2)=f(x_2)$.

由于$x_1\in(a,x_0)$、$x_2\in(x_0,b)$，所以显然$x_1\neq x_2$.

设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，且$f(a)=f(b)=0$，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$.

(1) 证明：存在互不相同的点x_1，$x_2\in(a,b)$，使得 $f'(x_i)=f(x_i)$，$i=1,2$;

(2) 证明：存在$\xi\in(a,b)$，$\xi\neq x_i$，$i=1,2$，使得 $f''(\xi)=f(\xi)$.

接上

(2)分析 $f''(x)=f(x)\Rightarrow f''(x)-f'(x)=f(x)-f'(x)\Rightarrow\dfrac{[f'(x)-f(x)]'}{f'(x)-f(x)}=-1$

$\Rightarrow\ln[f'(x)-f(x)]=-x+\ln C\Rightarrow \mathrm{e}^x[f'(x)-f(x)]=C$

(2)证 令$\varphi(x)=\mathrm{e}^x[f'(x)-f(x)]$，则$\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$,

$\varphi'(x)=\mathrm{e}^x[f'(x)-f(x)]+\mathrm{e}^x[f''(x)-f'(x)]=\mathrm{e}^x[f''(x)-f(x)]$.

对$\varphi(x)$在$[x_1,x_2]$上利用罗尔定理，存在$\xi\in(x_1,x_2)$，使$\varphi'(\xi)=0$,

即 $f''(\xi)=f(\xi)$. 显然$\xi\neq x_i$，$i=1,2$.

五、（12分）



中国大学MOOC

2021年5月决赛，12分

设A是n阶实对称矩阵，证明:(1) 存在实对称矩阵B，使得$B^{2021}=A$，且$AB=BA$;
(2) 存在一个多项式$p(x)$，使得上述矩阵$B=p(A)$; (3) 上述矩阵B是唯一的.

证 (1) 因为A是实对称矩阵，所以存在正交矩阵Q，使得$A=Q\Lambda Q^T$
其中$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，而$\lambda_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$为矩阵A的特征值.

令$B=Q\Lambda_1 Q^T$，其中$\Lambda_1=\mathrm{diag}(\lambda_1^{\frac{1}{2021}},\lambda_2^{\frac{1}{2021}},\cdots,\lambda_n^{\frac{1}{2021}})$,

$$\begin{aligned}\text{则}B^{2021}&=\left(Q\Lambda_1 Q^T\right)^{2021}=Q\Lambda_1\left(Q^T\cdot Q\right)\Lambda_1\left(Q^T\cdot Q\right)\Lambda_1 Q^T\cdots\cdots Q\Lambda_1 Q^T\\&=Q\Lambda_1^{2021}Q^T=Q\Lambda Q^T=A,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AB&=Q\Lambda Q^T\cdot Q\Lambda_1 Q^T=Q\Lambda\Lambda_1 Q^T=Q\Lambda_1\Lambda Q^T=Q\Lambda_1 Q^T Q\Lambda Q^T\\&=\left(Q\Lambda_1 Q^T\right)\cdot\left(Q\Lambda Q^T\right)=BA.\end{aligned}$$

设A是n阶实对称矩阵，证明：(1) 存在实对称矩阵B，使得$B^{2021}=A$，且$AB=BA$;

(1) 存在实对称矩阵B，使得$B^{2021}=A$，且$AB=BA$;

(2) 存在一个多项式$p(x)$，使得上述矩阵$B=p(A)$; (3) 上述矩阵B是唯一的.

接上

(2) 设λ_1，λ_2,…，λ_s是A的所有两两互异的特征值$(1\le s\le n)$,

构造s次多项式 $p(x)=x^s+a_1x^s+\cdots+a_{s-1}x+a_s$,

利用待定系数法及克莱姆法则，存在唯一的s次多项式

$p(x)=x^s+a_1x^s+\cdots+a_{s-1}x+a_s$，使得$p(\lambda_i)=\lambda_i^{\frac{1}{2021}}\ (i=1,2,\cdots,s)$

从而$p(\Lambda)=\Lambda_1$.

$B=Q\Lambda_1Q^T$，其中$\Lambda_1=\mathrm{diag}(\lambda_1^{\frac{1}{2021}},\lambda_2^{\frac{1}{2021}},\cdots,\lambda_n^{\frac{1}{2021}})$

所以$p(A)=p\left(Q\Lambda Q^T\right)=Qp(\Lambda)Q^T=Q\Lambda_1Q^T=B.$

设A是n阶实对称矩阵，证明:(1) 存在实对称矩阵B，使得$B^{2021}=A$，且$AB=BA$;

(1) 存在实对称矩阵B，使得$B^{2021}=A$，且$AB=BA$;

(2) 存在一个多项式$p(x)$，使得上述矩阵$B=p(A)$; (3) 上述矩阵B是唯一的.

接上

(3) 设存在实对称矩阵B，使得$B^{2021}=A$,

且另存在n阶实对称矩阵C，使得$C^{2021}=A$，则$B=p(A)=p(C^{2021})$

所以$BC=p(C^{2021})C=Cp(C^{2021})=CB$.

由于B，C都可以相似对角化，

故存在n阶可逆矩阵T及实对角矩阵D_1，D_2，使得$B=TD_1T^{-1}$，$C=TD_2T^{-1}$.

因此$C^{2021}=A=B^{2021}\Rightarrow D_2=D_1\Rightarrow C=B$.唯一性得证.

六、（12分）



中国大学MOOC

2021年5月决赛，12分

设$A_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}y^k$，其中$0<x,y<1$，证明：$\dfrac{2}{2-x-y}\le\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{A_n(x,y)}{n+1}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+y}\right)$.

证法1思路

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(x,y)}{n+1}=\frac{1}{y-x}\ln\frac{1-x}{1-y},$$

所以不等式化为$\dfrac{2}{2-x-y}\le\dfrac{1}{y-x}\ln\dfrac{1-x}{1-y}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+y}\right)$.

证法2思路

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(x,y)}{n+1}\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(x^n+y^n)$$

只需证明$\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n\le\dfrac{A_n(x,y)}{n+1}\le\dfrac{1}{2}(x^n+y^n)$，其中$0<x,y<1$.

设$A_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}y^k$，其中$0<x,y<1$，证明：$\frac{2}{2-x-y}\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(x,y)}{n+1}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+y}\right)$.

接上

证法1 当$x=y$时，$A_n(x,x)=\sum_{k=0}^{n}x^n=x^n\sum_{k=0}^{n}1=(n+1)x^n$，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(x,x)}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}，\text{等号成立.}$$

当$x\ne y$时，由$A_n(x,y)=A_n(y,x)$，可设$0<x<y<1$.

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{y}{x}\right)^k=1+\frac{y}{x}+\cdots+\left(\frac{y}{x}\right)^k$$

$$=\frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^{n+1}}{1-\frac{y}{x}}=\frac{y^{n+1}-x^{n+1}}{x^n(y-x)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(x,y)}{n+1}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}y^k\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{y}{x}\right)^k=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\cdot\frac{y^{n+1}-x^{n+1}}{x^n(y-x)}$$

$$=\frac{1}{y-x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}y^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)=\frac{1}{y-x}\ln\frac{1-x}{1-y},$$

设$A_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}y^k$，其中$0<x,y<1$，证明：$\frac{2}{2-x-y}\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(x,y)}{n+1}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+y}\right)$.

接上

所以不等式化为$\frac{2}{2-x-y}\le\frac{1}{y-x}\ln\frac{1-x}{1-y}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+y}\right)$.

对于$0\le t<1$，有$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)=\frac{1}{1-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}$，　①

①积分得$\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}=t+\frac{1}{3}t^3+\cdots+\frac{t^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$

①×t得$\frac{t}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)=\frac{t}{1-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n+1}=t+t^3+\cdots+t^{2n+1}+\cdots$,

所以　$t\le\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}\le\frac{t}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)$　②

设$A_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}y^k$，其中$0<x,y<1$，证明：$\frac{2}{2-x-y}\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(x,y)}{n+1}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+y}\right)$.

接上

需证 $\frac{2}{2-x-y}\le\frac{1}{y-x}\ln\frac{1-x}{1-y}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+y}\right)$

$t\le\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}\le\frac{t}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)$ ②

令$t=\frac{y-x}{2-x-y}$，则$0<t<1$，

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{y-x}{2-x-y}}{1-\frac{y-x}{2-x-y}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1-y},$$

$$\frac{t}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{y-x}{2-x-y}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{y-x}{2-x-y}}+\frac{1}{1+\frac{y-x}{2-x-y}}\right)=\frac{y-x}{4}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+y}\right),$$

代入②式得 $\frac{y-x}{2-x-y}\le\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1-y}\le\frac{y-x}{4}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+y}\right)$，不等式得证.

设$A_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}y^k$，其中$0<x,y<1$，证明：$\frac{2}{2-x-y}\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(x,y)}{n+1}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+y}\right)$.

接上

证法2 因为$\frac{2}{2-x-y}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$，$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$，

所以问题转化为$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(x,y)}{n+1}\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(x^n+y^n)$

这只需证明对任意$n\ge0$，都有$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\le\frac{A_n(x,y)}{n+1}\le\frac{1}{2}(x^n+y^n)$，其中$0<x,y<1$.

用数学归纳法.当$n=0,1$时，显然.

假设$n=p$时，结论成立，当$n=p+1$时，

$A_{p+1}(x,y)=\sum_{k=0}^{p+1}x^{p+1-k}y^k=x^{p+1}+yA_p(x,y)$，　$A_{p+1}(x,y)=\sum_{k=0}^{p+1}x^{p+1-k}y^k=y^{p+1}+xA_p(x,y)$，

设$A_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}y^k$，其中$0<x,y<1$，证明：$\frac{2}{2-x-y}\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(x,y)}{n+1}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+y}\right)$.

接上

假设$\left(\frac{x+y}{2}\right)^p\le\frac{A_p(x,y)}{p+1}\le\frac{1}{2}(x^p+y^p)$成立

$$A_{p+1}(x,y)=\frac{1}{2}\left(x^{p+1}+y^{p+1}\right)+\frac{1}{2}(x+y)A_p(x,y)$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^{p+1}+y^{p+1}\right)+\frac{p+1}{2}(x+y)\frac{A_p(x,y)}{p+1}$$

$$\le\frac{1}{2}\left(x^{p+1}+y^{p+1}\right)+\frac{p+1}{2}(x+y)\cdot\frac{1}{2}(x^p+y^p)$$

$$\le\frac{1}{2}\left(x^{p+1}+y^{p+1}\right)+\frac{p+1}{2}(x^{p+1}+y^{p+1})$$

所以$A_{p+1}(x,y)\le\frac{p+2}{2}(x^{p+1}+y^{p+1})$.

要证$\frac{A_{p+1}(x,y)}{p+2}\le\frac{1}{2}(x^{p+1}+y^{p+1})$

①

$$2(x^{p+1}+y^{p+1})-(x+y)(x^p+y^p)$$
$$=x^{p+1}-xy^p-x^py+y^{p+1}$$
$$=(x^p-y^p)(x-y)\ge0$$

设$A_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}y^k$，其中$0<x,y<1$，证明：$\frac{2}{2-x-y}\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(x,y)}{n+1}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+y}\right)$.

接上

假设$\left(\frac{x+y}{2}\right)^p\le\frac{A_p(x,y)}{p+1}\le\frac{1}{2}(x^p+y^p)$成立

要证$\left(\frac{x+y}{2}\right)^{p+1}\le\frac{A_{p+1}(x,y)}{p+2}$

$$A_{p+1}(x,y)=\frac{1}{2}\left(x^{p+1}+y^{p+1}\right)+\frac{p+1}{2}(x+y)\frac{A_p(x,y)}{p+1}\qquad①$$

另一方面，仍由①式及归纳假设可得

$$A_{p+1}(x,y)\ge\left(\frac{x+y}{2}\right)^{p+1}+\frac{p+1}{2}(x+y)\left(\frac{x+y}{2}\right)^{p}$$

$$=(p+2)\left(\frac{x+y}{2}\right)^{p+1}$$

因此，所证不等式对任意$n\ge0$及$0<x,y<1$都成立.

$f(x)=x^{p+1}$，曲线为凹的

$$\frac{1}{2}\left(x^{p+1}+y^{p+1}\right)\ge\left(\frac{x+y}{2}\right)^{p+1}$$

七、（10分）



中国大学MOOC

2021年5月决赛，10分

设$f(x)$，$g(x)$是$[0,1]\to[0,1]$的连续函数，且$f(x)$单调增加，

求证：$\int_0^1 f\left[g(x)\right]\mathrm{d}x \le \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x.$

证 令$F(x)=f(x)-x$，$F\left(g(x)\right)=f\left(g(x)\right)-g(x)$

$$\int_0^1 f\left[g(x)\right]\mathrm{d}x \le \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_0^1 f\left[g(x)\right]\mathrm{d}x - \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x \le \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1\left[f\left(g(x)\right)-g(x)\right]\mathrm{d}x - \int_0^1\left[f(x)-x\right]\mathrm{d}x \le \int_0^1 x\mathrm{d}x,$$

问题转化成$\int_0^1 F\left[g(x)\right]\mathrm{d}x - \int_0^1 F(x)\mathrm{d}x \le \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2},$

这只需$F_{\max}(x) - \int_0^1 F(x)\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}$，即$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x \ge F_{\max}(x) - \frac{1}{2}.$

设$f(x)$，$g(x)$是$[0,1]\to[0,1]$的连续函数，且$f(x)$单调增加，

求证：$\int_0^1 f[g(x)]\mathrm{d}x \le \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x.$

接上

只需证 $\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x \ge F_{\max}(x) - \frac{1}{2}.$ $F(x) = f(x) - x$

记$F_{\max}(x) = F(x_0) = a$，由于$0 \le f(x) \le 1$，则$-x \le F(x) \le 1-x$，

所以$a \le 1$.

因为$f(x)$单调增加，当$x \in [x_0, 1]$时，$f(x) \ge f(x_0)$，

即 $F(x) + x \ge F(x_0) + x_0 = a + x_0$，得 $F(x) \ge a + x_0 - x$

$$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x = \int_0^{x_0} F(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0}^1 F(x)\mathrm{d}x \ge \int_0^{x_0}(-x)\mathrm{d}x + \int_{x_0}^1 (a + x_0 - x)\mathrm{d}x$$

$$= a - \frac{1}{2} + x_0(1 - x_0) \ge a - \frac{1}{2} = F_{\max}(x) - \frac{1}{2}.$$ 结论得证.

END



中国大学MOOC