全国大学生
数学竞赛



第12届预赛

中国大学MOOC

一、填空题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

第1题



(2020预赛，6分) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}=$ _____.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{-x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{-\frac{1}{2}x^3}$

$=-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$

$=-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}$

$x\to 0$时，$\sqrt{1-x^3}-1\sim-\dfrac{1}{2}x^3$

$x\to 0$时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$

故应填 $-\dfrac{1}{3}$.

中国大学MOOC

一、填空题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

第2题



中国大学MOOC

(2020预赛，6分) 设函数$f(x)=(x+1)^n e^{-x^2}$，则$f^{(n)}(-1)=$_____.

解　利用莱布尼兹公式，取$u=(x+1)^n$，$v=e^{-x^2}$，

$$u'=n(x+1)^{n-1},\quad u''=n(n-1)(x+1)^{n-2},\cdots,$$

$$u^{(n-1)}=n(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot(x+1),\quad u^{(n)}=n!$$

故应填 $\frac{n!}{e}$

$$f^{(n)}(x)=n!\cdot e^{-x^2}+\sum_{n=0}^{n-1}C_n^k[(x+1)^n]^{(k)}(e^{-x^2})^{(n-k)},\text{所以 } f^{(n)}(-1)=\frac{n!}{e}.$$

莱布尼兹公式　$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{1}{2!}n(n-1)u^{(n-2)}v''+\cdots$

$$+\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}$$

一、填空题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

第3题



中国大学MOOC

(2020预赛，6分) 设$y=f(x)$是由方程$\arctan\frac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}$确定的隐函数，且满足$f(1)=1$，则曲线$y=f(x)$在点$(1,1)$处的切线方程为_____.

解　方程整理得　$\arctan\frac{x}{y}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}$

方程两端求导得　$\dfrac{\dfrac{y-xy'}{y^2}}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x+2yy'}{x^2+y^2}\Rightarrow y-xy'=x+yy'$

即　$(x+y)y'=y-x$，　$f(1)=1$代入得$f'(1)=0$,

曲线$y=f(x)$在点$(1,1)$处的切线方程为$y=1$.　故应填 $y=1$

一、填空题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

第4题



(2020预赛，6分) 已知$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，则$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin(x+y)}{x(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_____.

解　令$u=x+y$

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+y)}{x+y}\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\left(\int_x^{0}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u+\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u-\int_0^{x}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right)$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u-\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_0^{x}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u-\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\int_0^{x}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$$

已知$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$，则$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin(x+y)}{x(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_____.

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u-\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\int_0^{x}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right)^2-\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\int_0^{x}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x$$

故应填$\frac{\pi^2}{8}$

记$F(x)=\int_0^{x}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$，则$F'(x)=\frac{\sin x}{x}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\frac{\pi}{2}$，

$$I=\frac{\pi^2}{4}-\int_0^{+\infty}F(x)\cdot F'(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{2}[F(x)]^2\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{8}.$$

一、填空题

(本题共5个小题，每小题6分，共30分)

第5题



(2020预赛，6分)

设$f(x)$、$g(x)$在$x=0$的某一邻域U内有定义，对任意$x\in U$，$f(x)\neq g(x)$，且$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=a>0$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[f(x)]^{g(x)}-[g(x)]^{g(x)}}{f(x)-g(x)}=$_____.

解　由$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=a>0$，根据极限保号性，存在$x=0$的某一邻域$U_1$，使得$x\in U_1$时，$f(x)>0$，$g(x)>0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{[f(x)]^{g(x)}-[g(x)]^{g(x)}}{f(x)-g(x)}=\lim_{x\to 0}[g(x)]^{g(x)}\cdot\frac{\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]^{g(x)}-1}{f(x)-g(x)}$$

$u=\mathrm{e}^{\ln u}$

$$=a^a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{g(x)\ln\frac{f(x)}{g(x)}}-1}{f(x)-g(x)}=a^a\cdot\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\ln\dfrac{f(x)}{g(x)}}{f(x)-g(x)}$$

$t\to 0$时，$\mathrm{e}^t-1\sim t$

三、利用等价无穷小代换求极限

设$f(x)$、$g(x)$在$x=0$的某一邻域U内由定义，对任意$x\in U$，$f(x)\neq g(x)$，且$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=a>0$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[f(x)]^{g(x)}-[g(x)]^{g(x)}}{f(x)-g(x)}=$_____.

$$=a^{a}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\ln\dfrac{f(x)}{g(x)}}{f(x)-g(x)}=a^{a}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot\ln\left[1+\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}-1\right)\right]}{f(x)-g(x)}$$

$$=a^{a}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}-1\right]}{f(x)-g(x)}$$

$$=a^{a}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-g(x)}{f(x)-g(x)}=a^{a}$$

$t\to 0$时，$\ln(1+t)\sim t$

二、（本题满分10分）



中国大学MOOC

(2020预赛，10分) 设数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，且$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(n+1)(a_n+1)}$，$n\geq 1$.

求极限$\lim\limits_{n\to\infty} n!a_n$.

解　$n\geq 1$时，$a_n>0$.

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{(n+1)(a_n+1)}{a_n}=(n+1)(1+\frac{1}{a_n})=(n+1)+(n+1)\cdot\frac{1}{a_n}$$

$\dfrac{1}{a_n}=n+n\cdot\dfrac{1}{a_{n-1}}$

$$=(n+1)+(n+1)\cdot\left(n+n\cdot\frac{1}{a_{n-1}}\right)=(n+1)+(n+1)n+(n+1)n\cdot\frac{1}{a_{n-1}}$$

$$=(n+1)+(n+1)n+(n+1)n(n-1)+\cdots+(n+1)n(n-1)\cdots\cdot 3\cdot(2+2\cdot\frac{1}{a_1})$$

$$=(n+1)!\left(\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}+\cdots+1+\frac{1}{a_1}\right)=(n+1)!\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{a_1}\right)=(n+1)!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

设数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，且$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(n+1)(a_n+1)}$，$n\geq 1$. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty} n!a_n$.

$$\frac{1}{a_{n+1}}=(n+1)!\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{a_1}\right)=(n+1)!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{a_n}=n!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}$$

$$\mathrm{e}^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k,\qquad \text{令}x=1\text{得}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=\mathrm{e}$$

$$\lim_{n\to\infty} n!a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

三、（本题满分10分）



中国大学MOOC

(2020预赛，10分)

设$f(x)$在$[0,1]$上连续，$f(x)$在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$.

证明：(1) 存在$x_0 \in (0,1)$，使得$f(x_0)=2-3x_0$；

(2) 存在ξ、$\eta \in (0,1)$，且$\xi \neq \eta$，使得$[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$.

证 (1) 令$F(x)=f(x)-2+3x$，

则$F(x)$在$[0,1]$上连续，且$F(0)=-2$，$F(1)=2$.

根据连续函数的介值定理，存在$x_0 \in (0,1)$，使得$F(x_0)=0$，

即$f(x_0)=2-3x_0$.

设$f(x)$在$[0,1]$上连续，$f(x)$在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$.

证明：(1) 存在$x_0\in(0,1)$，使得$f(x_0)=2-3x_0$;

(2) 存在ξ、$\eta\in(0,1)$，且$\xi\neq\eta$，使得$[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$.

(2) 在区间$[0,x_0]$上利用拉格朗日中值定理，存在$\xi\in(0,1)$，使得

$$\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=f'(\xi)\qquad\Rightarrow f'(\xi)=\frac{2-3x_0}{x_0};$$

在区间$[x_0,1]$上利用拉格朗日中值定理，存在$\eta\in(0,1)$，使得

$$\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=f'(\eta)\ \Rightarrow\frac{1-2+3x_0}{1-x_0}=f'(\eta)\Rightarrow f'(\eta)=\frac{-1+3x_0}{1-x_0}$$

显然$\xi\neq\eta$　　所以$[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=\dfrac{2(1-x_0)}{x_0}\cdot\dfrac{2x_0}{1-x_0}=4.$

四、（本题满分12分）



中国大学MOOC

(2020预赛，12分)

已知$z = xf(\frac{y}{x}) + 2y\varphi(\frac{x}{y})$，其中$f$，$\varphi$均为二次可微函数.

(1) 求$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$；　　(2) 当$f = \varphi$，且$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{x=a} = -by^2$时，求$f(y)$.

解　(1) $\frac{\partial z}{\partial x} = f(\frac{y}{x}) + x \cdot f'(\frac{y}{x}) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + 2y \cdot \varphi'(\frac{x}{y}) \cdot \frac{1}{y} = f(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x} f'(\frac{y}{x}) + 2\varphi'(\frac{x}{y})$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[f(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x} f'(\frac{y}{x}) + 2\varphi'(\frac{x}{y})\right]$$

$$= f'(\frac{y}{x}) \cdot \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} f'(\frac{y}{x}) + \frac{y}{x} \cdot f''(\frac{y}{x}) \cdot \frac{1}{x}\right] + 2\varphi''(\frac{x}{y}) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$$= f'(\frac{y}{x}) \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x} f'(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x^2} f''(\frac{y}{x}) - \frac{2x}{y^2}\varphi''(\frac{x}{y}) = -\frac{y}{x^2} f''(\frac{y}{x}) - \frac{2x}{y^2}\varphi''(\frac{x}{y}).$$

二、多元复合函数求导法则

(2) 当$f=\varphi$，且$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=a}=-by^2$时，求$f(y)$.

$$(2)\ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=a}=-\frac{y}{x^2}f''(\frac{y}{x})-\frac{2x}{y^2}\varphi''(\frac{x}{y})\Big|_{x=a}=-\frac{y}{a^2}f''(\frac{y}{a})-\frac{2a}{y^2}\varphi''(\frac{a}{y})=-by^2$$

因为$f=\varphi$，所以$\dfrac{y}{a^2}f''(\dfrac{y}{a})+\dfrac{2a}{y^2}f''(\dfrac{a}{y})=-by^2$，　令$u=\dfrac{y}{a}$

则$\dfrac{u}{a}f''(u)+\dfrac{2}{au^2}f''(\dfrac{1}{u})=a^2bu^2$，　$u^3f''(u)+2f''(\dfrac{1}{u})=a^3bu^4$　①

①中用$\dfrac{1}{u}$替换u得　$f''(\dfrac{1}{u})+2u^3f''(u)=\dfrac{a^3b}{u}$　②

二、多元复合函数求导法则

$$\begin{cases} u^3 f''(u) + 2f''\left(\dfrac{1}{u}\right) = a^3 b u^4 & ① \\ 2u^3 f''(u) + f''\left(\dfrac{1}{u}\right) = \dfrac{a^3 b}{u} & ② \end{cases}$$

(2) 当$f = \varphi$，且$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{x=a} = -by^2$时，求$f(y)$.

$$-3u^3 f''(u) = a^3 b\left(u^4 - \frac{2}{u}\right) \Rightarrow f''(u) = \frac{a^3 b}{3}\left(\frac{2}{u^4} - u\right)$$

$$\Rightarrow f'(u) = \frac{a^3 b}{3}\left(-\frac{2}{3u^3} - \frac{1}{2}u^2\right) + C_1 \quad \Rightarrow f(u) = \frac{a^3 b}{3}\left(\frac{1}{3u^2} - \frac{1}{6}u^3\right) + C_1 u + C_2$$

故 $f(y) = \dfrac{a^3 b}{3}\left(\dfrac{1}{3y^2} - \dfrac{1}{6}y^3\right) + C_1 y + C_2.$

中国大学MOOC

五、（本题满分12分）



中国大学MOOC

(2020预赛，12分)

计算$I=\oint_{\Gamma}|\sqrt{3}y-x|\mathrm{d}x-5z\mathrm{d}z$，$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8\\x^2+y^2=2z\end{cases}$，从$z$轴正向往坐标原点看去取逆时针方向.

解　$\Gamma:\begin{cases}z=2\\x^2+y^2=4\end{cases}\Rightarrow\Gamma$的参数方程:$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=2\sin\theta,0\le\theta\le2\pi\\z=2\end{cases}$

$$I=-\int_0^{2\pi}|2\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta|2\sin\theta\mathrm{d}\theta=-8\int_0^{2\pi}|\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta|\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=-8\int_0^{2\pi}|\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)|\sin\theta\mathrm{d}\theta=-8\int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi+\frac{\pi}{3}}|\cos t|\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}t\quad\text{令}t=\theta+\frac{\pi}{3}$$

一、第二类曲线积分

计算$I=\oint_{\Gamma}|\sqrt{3}y-x|\mathrm{d}x-5z\mathrm{d}z$，$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8\\x^2+y^2=2z\end{cases}$，从$z$轴正向往坐标原点看去取逆时针方向.

根据周期函数的积分性质得

$$I=-8\int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi+\frac{\pi}{3}}|\cos t|\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}t$$

$$I=-8\int_{-\pi}^{\pi}|\cos t|\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}t=-4\int_{-\pi}^{\pi}|\cos t|\left(\sin t-\sqrt{3}\cos t\right)\mathrm{d}t$$

$$=-4\int_{-\pi}^{\pi}|\cos t|\sin t\mathrm{d}t+4\int_{-\pi}^{\pi}|\cos t|\cdot\sqrt{3}\cos t\mathrm{d}t$$

$$=0+8\sqrt{3}\int_{0}^{\pi}|\cos t|\cos t\mathrm{d}t$$

令$u=t-\frac{\pi}{2}$

$$=-8\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin u|\sin u\mathrm{d}t=0.$$

六、（本题满分12分）



中国大学MOOC

(2020预赛，12分) 证明$f(n)=\sum_{m=1}^{n}\int_0^m \cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x$ 等于n的所有因子(包括1和n本身)之和，其中$[x+1]$表示不超过$x+1$的最大整数，并计算$f(2021)$.

解 $\int_0^m \cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x=\int_0^1 \cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x+\int_1^2 \cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x+\cdots$

$+\int_{m-1}^m \cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{m}\int_{k-1}^k \cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x$

$=\sum_{k=1}^{m}\int_{k-1}^k \cos\frac{2\pi nk}{m}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{m}\cos k\frac{2\pi n}{m}$

如果m是n的因子，则$\int_0^m \cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x=\int_0^m \cos 2\pi l\mathrm{d}x=\int_0^m 1\mathrm{d}x=m.$

证明$f(n)=\sum_{m=1}^{n}\int_0^m \cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x$ 等于n的所有因子(包括1和n本身)之和，其中$[x+1]$表示不超过$x+1$的最大整数，并计算$f(2021)$.

否则，根据三角恒等式$\sum_{k=1}^{m}\cos kt=\cos\frac{m+1}{2}t\cdot\frac{\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$有

$$\int_0^m \cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x=\cos\left(\frac{m+1}{2}\cdot\frac{2\pi n}{m}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{m}{2}\cdot\frac{2\pi n}{m}\right)}{\sin\frac{2\pi n}{2m}}=0$$

2021的因子为1, 43, 47, 2021

$$f(2021)=1+43+47+2021=2112.$$

七、（本题满分14分）



中国大学MOOC

(2020预赛，14分) 设$u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}\ (n\geq 1)$.

(1) 证明数列$\{u_n\}$收敛，并求极限$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$；(2) 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$条件收敛；

(3) 证明当$p\geq 1$时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$收敛，并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$的和

解　(1) 对任意$\varepsilon>0$, 取$0<a<\frac{\varepsilon}{2}$，将积分区间分成两段，

$$u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}=\int_0^a\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}+\int_a^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}\qquad \int_0^a\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}<\int_0^a\mathrm{d}t=a<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_a^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}\leq\int_a^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+a^4)^n}=\frac{1}{(1+a^4)^n}\int_a^1\mathrm{d}t=\frac{1-a}{(1+a^4)^n}<\frac{1}{(1+a^4)^n}\to 0\ (n\to\infty)$$

设$u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}$ $(n\geq 1)$.(1) 证明数列$\{u_n\}$收敛，并求极限$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$;

(2) 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$条件收敛;

(3) 证明当$p\geq 1$时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$收敛，并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$的和

所以存在正整数N，当$n>N$时，$\int_a^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}<\frac{\varepsilon}{2}$,

$$0\leq u_n<a+\int_a^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$;

设$u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}\ (n\geq 1)$ (2) 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$条件收敛;

(2) $0<u_{n+1}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^{n+1}}\leq\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}=u_n$，即$u_n$单调递减，又$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,

故由莱布尼茨判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$收敛.

另一方面，当$n\geq 2$时，有

$$u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}\geq\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^n}=\frac{1}{1-n}(1+t)^{1-n}\Big|_0^1=\frac{1}{n-1}(1-2^{1-n})$$

由于$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$发散,$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}$收敛，所以$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}(1-\frac{1}{2^{n-1}})$发散，

从而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，因此$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$条件收敛.

设$u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}$ $(n\geq 1)$ (3) 证明当$p\geq 1$时级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$收敛，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$的和

(3) 先求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$的和.

$$u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}=\frac{t}{(1+t^4)^n}\Big|_0^1+n\int_0^1\frac{4t^4}{(1+t^4)^{n+1}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2^n}+4n\int_0^1\frac{1+t^4-1}{(1+t^4)^{n+1}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2^n}+4n(u_n-u_{n+1})$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}+4\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}+4u_1$

设$u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}$ $(n\geq 1)$ (3) 证明当$p\geq 1$时级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$收敛，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$的和

利用展开式$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$，取$x=-\frac{1}{2}$，得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}=\ln 2.$

$$u_1=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}=\frac{\sqrt{2}}{8}\left[\pi+2\ln(1+\sqrt{2})\right],$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}=\ln 2+\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\pi+2\ln(1+\sqrt{2})\right].$

最后，当$p\geq 1$时，因为$\frac{u_n}{n^p}\leq\frac{u_n}{n}$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$收敛.

设$u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}\ (n\geq 1)$　(3) 证明当$p\geq 1$时级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$收敛，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$的和

$$\int\frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{8}\left(2x+\sqrt{2}\right)+\frac{1}{4}}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{-\frac{\sqrt{2}}{8}\left(2x+\sqrt{2}\right)+\frac{1}{4}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{8}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

END



中国大学MOOC