全国大学生
数学竞赛



第11届预赛

中国大学MOOC

一、填空题

(本题满分30分，共5小题，每小题6分

第1题



中国大学MOOC

(2019预赛，6分) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\sin x}{\arctan\left(4\sqrt[3]{1-\cos x}\right)}=$ _____.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\sin x}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\left(e^{\sin x}-1+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)\right]}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{4\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}$

$x\to 0$时，$\arctan x\sim x$

$x\to 0$时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$

$x\to 0$时，$\sqrt[3]{1-\cos x}\sim\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}x^{\frac{3}{2}}$

$x\to 0$时，$\sin x\sim x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\sin x}{\arctan\left(4\sqrt[3]{1-\cos x}\right)}=_____.$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+\left(e^{\sin x}-1+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)\right]}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}-\lim_{x\to 0}\frac{x}{4\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$x\to 0$时，$\ln(1+x)\sim x$

$x\to 0$时，$e^x-1\sim x$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\sin x}-1\right)+\sqrt[3]{1-\cos x}}{4\sqrt[3]{1-\cos x}}-0=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{4\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{4\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

故应填 $\frac{1}{4}$

中国大学MOOC

一、填空题

(本题满分30分，共5小题，每小题6分

第2题



中国大学MOOC

(2019预赛，6分)

设隐函数$y=y(x)$由方程$y^2(x-y)=x^2$所确定，则$\int \frac{\mathrm{d}x}{y^2}=$_____.

分析　$y^2(x-y)=x^2 \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2(x-y)=1$, 考虑令$\frac{y}{x}=t$，求$y=y(x)$的参数方程.

解　令$y=tx$，代入方程得$t^2(1-t)x=1$, 则$x=\frac{1}{t^2(1-t)}$，$y=\frac{1}{t(1-t)}$,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{y^2}=\int t^2(1-t)^2\cdot\frac{-2+3t}{t^3(1-t)^2}\mathrm{d}t=\int\frac{3t-2}{t}\mathrm{d}t \qquad \mathrm{d}x=\frac{-2+3t}{t^3(1-t)^2}\mathrm{d}t.$$

$$=3t-2\ln|t|+C=\frac{3y}{x}-2\ln\left|\frac{y}{x}\right|+C.$$

故应填$\frac{3y}{x}-2\ln\left|\frac{y}{x}\right|+C$

一、填空题

(本题满分30分，共5小题，每小题6分

第3题



中国大学MOOC

(2019预赛，6分)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\,dx = _____.$$

解 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+\cos x}\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \sin x}{1+\cos x}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+\cos x}\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}\,de^x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+\cos x}\,dx + \frac{e^x \sin x}{1+\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \frac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+\cos x}\,dx + \frac{e^x \sin x}{1+\cos x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+\cos x}\,dx = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

$$\frac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x+1}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}$$

故应填$e^{\frac{\pi}{2}}$

一、填空题

(本题满分30分，共5小题，每小题6分

第4题



中国大学MOOC

(2019预赛，6分)

已知$\mathrm{d}u(x,y)=\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{3x^2-2xy+3y^2}$，则$u(x,y)=$_____.

$$\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}$$

解 $\mathrm{d}u(x,y)=\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{3x^2-2xy+3y^2}=\dfrac{\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}}{\dfrac{3x^2-2xy+3y^2}{y^2}}$

$$=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{x}{y}\right)}{3\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-2\dfrac{x}{y}+3}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{d}\left[\arctan\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x}{y}-\frac{1}{3}\right)\right]$$

所以 $u(x,y)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{3}\right)+C.$

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{3t^2-2t+3}=\int\frac{\mathrm{d}t}{3(t-\frac{1}{3})^2+\frac{8}{3}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}\left[\dfrac{3}{2\sqrt{2}}(t-\dfrac{1}{3})\right]}{\left[\dfrac{3}{2\sqrt{2}}(t-\dfrac{1}{3})\right]^2+1}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(t-\frac{1}{3}\right)+C$$

一、填空题

(本题满分30分，共5小题，每小题6分

第5题



中国大学MOOC

(2019预赛，6分)

设a，b，$\mu>0$，曲面$xyz=\mu$与曲面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$相切，则$\mu=$_____.

解　设两曲面在$M(x,y,z)$相切，$F(x,y,z)=xyz-\mu$，$\{F_x',\ F_y',\ F_z'\}=\{yz,xz,xy\}$

$$G(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1,\ \{G'_x,G'_y,G'_z\}=\{\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2}\},$$

由两曲面在M相切得 $yz=\dfrac{2x}{a^2}\lambda,\ xz=\dfrac{2y}{b^2}\lambda,\ xy=\dfrac{2z}{c^2}\lambda.$

$$\mu=xyz=x\cdot\frac{2x}{a^2}\lambda=2\lambda\frac{x^2}{a^2}\quad①\qquad \mu=xyz=y\cdot\frac{2y}{b^2}\lambda=2\lambda\frac{y^2}{b^2}\quad②$$

$$\mu=xyz=\frac{2z}{c^2}\lambda\cdot z=2\lambda\frac{z^2}{c^2}\quad③$$

设a，b，$\mu>0$，曲面$xyz=\mu$与曲面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$相切，则$\mu=$_____.

$\mu=2\lambda\dfrac{x^2}{a^2}$ ①　　$\mu=2\lambda\dfrac{y^2}{b^2}$ ②　　$\mu=2\lambda\dfrac{z^2}{c^2}$ ③

①×②×③得　$\mu^3=2\lambda\dfrac{x^2}{a^2}\cdot 2\lambda\dfrac{y^2}{b^2}\cdot 2\lambda\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{8\lambda^3}{a^2b^2c^2}(xyz)^2=\dfrac{8\lambda^3}{a^2b^2c^2}\mu^2$

$$\Rightarrow \mu=\frac{8\lambda^3}{a^2b^2c^2},$$

①+②+③得　$3\mu=2\lambda\dfrac{x^2}{a^2}+2\lambda\dfrac{y^2}{b^2}+2\lambda\dfrac{z^2}{c^2}=2\lambda\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)=2\lambda$

联立$\begin{cases}\mu=\dfrac{8\lambda^3}{a^2b^2c^2},\\ 3\mu=2\lambda\end{cases}$，解得$\mu=\dfrac{abc}{3\sqrt{3}}$.

故应填$\dfrac{abc}{3\sqrt{3}}$

二、（14分）



中国大学MOOC

(2019预赛，14分)

计算三重积分$\iiint_{\Omega}\frac{xyz}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中Ω是由曲面$(x^2+y^2+z^2)^2=2xy$围成的区域在第一卦限部分.

$$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$$

$$\mathrm{d}V=r^2\sin\varphi\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

分析　$(x^2+y^2+z^2)^2=2xy$ 令$z=0$得 $(x^2+y^2)^2=2xy$

$$\Rightarrow r^4=2r^2\sin\theta\cos\theta\Rightarrow r^2=\sin 2\theta\geq 0\Rightarrow 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$$

$$r^4=2r\sin\varphi\cos\theta\cdot r\sin\varphi\sin\theta$$

$$\Rightarrow r^2=2\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta\Rightarrow r=\sqrt{2}\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}$$

解　$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}\frac{r^3\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta\cos\varphi}{r^2\sin^2\varphi}\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}} r^3\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}r$$

计算 $\iiint_\Omega \frac{xyz}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}\sin\varphi\sqrt{\sin\theta\cos\theta}} r^3\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\theta\cos^3\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi \quad =\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\theta\cos^3\theta\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3 2\theta\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\mathrm{d}(\sin\varphi)=\frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\mathrm{d}t\cdot\frac{1}{6}\sin^6\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{96}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 t-1)\mathrm{d}\cos t=\frac{1}{96}\cdot(\frac{1}{3}\cos^3 t-\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{96}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{144}.$$

三、（14分）



中国大学MOOC

(2019预赛，14分)

设$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上可微，$f(0)=0$，且存在常数$A>0$，使得$|f'(x)|\le A|f(x)|$在$[0,+\infty)$上成立，试证明$(0,+\infty)$上有$f(x)\equiv 0$.

证　设$x_0\in[0,\frac{1}{2A}]$，使得$|f(x_0)|=\max\left\{|f(x)|\,\middle|\,x\in[0,\frac{1}{2A}]\right\}$,.

$$|f(x_0)|=|f(0)+f'(\xi)x_0|=|f'(\xi)x_0|\le A|f(\xi)|\cdot x_0$$

$$\le A|f(x_0)|\cdot\frac{1}{2A}=\frac{1}{2}|f(x_0)| \quad\Rightarrow|f(x_0)|=0.$$

故当$x\in[0,\frac{1}{2A}]$时，$f(x)\equiv 0$.

递推可得，对所有的$x\in[\frac{k-1}{2A},\frac{k}{2A}]$，$k=1,2,\cdots$，均有$f(x)\equiv 0$.

设$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上可微，$f(0)=0$，且存在常数$A>0$，使得$|f'(x)|\le A|f(x)|$在$[0,+\infty)$上成立，试证明$(0,+\infty)$上有$f(x)\equiv 0$.

设$x_1\in[\frac{1}{2A},\frac{2}{2A}]$，使得$|f(x_1)|=\max\left\{|f(x)|\,\middle|\,x\in[\frac{1}{2A},\frac{2}{2A}]\right\}$，

$$|f(x_1)|=|f(\frac{1}{2A})+f'(\xi_1)x_1|=|f'(\xi_1)x_1|\le A|f(\xi)|\cdot x_1$$

$$\le A|f(x_1)|\cdot\frac{1}{2A}=\frac{1}{2}|f(x_1)| \quad\Rightarrow|f(x_1)|=0.$$

故当$x\in[\frac{1}{2A},\frac{2}{2A}]$时，$f(x)\equiv 0$.

递推可得对所有的$x\in[\frac{k-1}{2A},\frac{k}{2A}]$，$k=1,2,\cdots$，均有$f(x)\equiv 0$.

四、（14分）



中国大学MOOC

(2019预赛，14分) 计算积分$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\sin\theta(\cos\varphi-\sin\varphi)}\sin\theta\mathrm{d}\theta$

解　设球面$\Sigma:x^2+y^2+z^2=1$，球面参数方程$\begin{cases}x=\sin\theta\cos\varphi\\ y=\sin\theta\sin\varphi\\ z=\cos\theta\end{cases}\quad\begin{matrix}0\le\varphi\le2\pi\\ 0\le\theta\le\pi\end{matrix}$

$\mathrm{d}S=\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,$

所求积分可化为第一类曲面积分$I=\iint_{\Sigma}\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}S$

设平面$P_t:\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}=t,-1\le t\le1,$其中$t$为平面$P_t$被球面截下部分中心到原点距离.用平面$P_t$分割球面$\Sigma$，球面在平面$P_t$，$P_{t+\mathrm{d}t}$之间的部分形如圆台外表面状，记为$\Sigma_{t,\mathrm{d}t}$.被积函数在其上为$\mathrm{e}^{x-y}=\mathrm{e}^{\sqrt{2}t}$.

计算积分$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\sin\theta(\cos\varphi-\sin\varphi)}\sin\theta\mathrm{d}\theta$

由于$\Sigma_{t,\mathrm{d}t}$半径为$r_t=\sqrt{1-t^2}$，半径的增长率为$\mathrm{d}\sqrt{1-t^2}=\dfrac{-t\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$，

就是$\Sigma_{t,\mathrm{d}t}$上下底半径之差.

记圆台外表面斜高为h_t，则由微元法知$\mathrm{d}t^2+\left(\mathrm{d}\sqrt{1-t^2}\right)^2=h_t^2$，

得到$h_t=\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$，　　所以$\Sigma_{t,\mathrm{d}t}$的面积为$\mathrm{d}S=2\pi r_t h_t=2\pi\mathrm{d}t$，

$$I=\iint_{\Sigma}\mathrm{e}^{x-y}\mathrm{d}S=\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{\sqrt{2}t}2\pi\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\sqrt{2}t}\Big|_{-1}^{1}=\sqrt{2}\pi\left(\mathrm{e}^{\sqrt{2}}-\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}\right).$$

$\mathrm{d}S = \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$

若曲面的参数方程 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} (u,v) \in D$，则 $\mathrm{d}S = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，

其中 $E = x_u^{\,2} + y_u^{\,2} + z_u^{\,2}$，$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$，$G = x_v^{\,2} + y_v^{\,2} + z_v^{\,2}$

球面参数方程 $\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases}$

$E = (R\cos\theta\cos\varphi)^2 + (R\cos\theta\sin\varphi)^2 + (-R\sin\theta)^2 = R^2$

$F = (R\cos\theta\cos\varphi)(-R\sin\theta\sin\varphi) + (R\cos\theta\sin\varphi)(R\sin\theta\cos\varphi) + (-R\sin\theta)\cdot 0 = 0$

$G = (-R\sin\theta\sin\varphi)^2 + (R\sin\theta\cos\varphi)^2 + 0^2 = R^2\sin^2\theta$

$\mathrm{d}S = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = R\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$

五、（14分）



中国大学MOOC

(2019预赛，14分) 设$f(x)$是仅有正实根的多项式函数，且满足$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n x^n$.

证明：$c_n>0$，$n\geq 0$，极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$存在，且等于$f(x)$的最小根.

分析　$f(x)=A(x-a_1)^{r_1}\cdots\cdots(x-a_k)^{r_k}$，

$f'(x)=Ar_1(x-a_1)^{r_1-1}\cdots\cdots(x-a_k)^{r_k}+\cdots+Ar_k(x-a_1)^{r_1}\cdots\cdots(x-a_k)^{r_k-1}$，

结合$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n x^n$可求得$c_n$；　　$\sqrt[n]{c_n}=c_n^{\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^{\ln c_n^{\frac{1}{n}}}=\mathrm{e}^{\frac{\ln c_n}{n}}$

$$\frac{\ln c_n}{n}=\frac{\ln c_1+(\ln c_2-\ln c_1)+(\ln c_3-\ln c_2)+\cdots+(\ln c_n-\ln c_{n-1})}{n}$$

$$=\frac{\ln c_1}{n}+\frac{1}{n}\left(\ln\frac{c_2}{c_1}+\cdots+\ln\frac{c_n}{c_{n-1}}\right)$$

设$f(x)$是仅有正实根的多项式函数，且$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n x^n$.证明：$c_n>0$，$n\geq 0,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$存在，且等于$f(x)$的最小根.

证　由$f(x)$为仅有正实根的多项式，不妨设$f(x)$的全部根为$0<a_1<a_2<\cdots<a_k$，

则$f(x)=A(x-a_1)^{r_1}\cdots\cdots(x-a_k)^{r_k}$，其中$r_i$为对应根$a_i$的重数$(i=1,\cdots,k,r_k\geq 1)$.

$$f'(x)=Ar_1(x-a_1)^{r_1-1}\cdots\cdots(x-a_k)^{r_k}+\cdots+Ar_k(x-a_1)^{r_1}\cdots\cdots(x-a_k)^{r_k-1},$$

所以　$$f'(x)=f(x)\left(\frac{r_1}{x-a_1}+\cdots+\frac{r_k}{x-a_k}\right),$$

从而　$$-\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{r_1}{a_1}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x}{a_1}}+\cdots+\frac{r_k}{a_k}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x}{a_k}}.$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

设$f(x)$是仅有正实根的多项式函数，且$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$.证明：$c_n>0$，$n\geq 0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$存在，且等于$f(x)$的最小根.

若$|x|<a_1$，则$-\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{r_1}{a_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{a_1}\right)^n+\cdots+\dfrac{r_k}{a_k}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{a_k}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{r_1}{a_1^{n+1}}+\cdots+\dfrac{r_k}{a_k^{n+1}}\right)x^n$

而$-\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$，由幂级数的唯一性知$c_n=\dfrac{r_1}{a_1^{n+1}}+\cdots+\dfrac{r_k}{a_k^{n+1}}>0$

分子分母同乘以a_1^{n+1}

$$\frac{c_n}{c_{n-1}}=\frac{\dfrac{r_1}{a_1^{n+1}}+\cdots+\dfrac{r_k}{a_k^{n+1}}}{\dfrac{r_1}{a_1^{n}}+\cdots+\dfrac{r_k}{a_k^{n}}}=\frac{1}{a_1}\cdot\frac{r_1+\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)^{n+1}r_2+\cdots+\left(\dfrac{a_1}{a_k}\right)^{n+1}r_k}{r_1+\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)^{n}r_2+\cdots+\left(\dfrac{a_1}{a_k}\right)^{n}r_k}$$

设$f(x)$是仅有正实根的多项式函数，且$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n x^n$.证明：$c_n>0$，$n\geq 0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$存在，且等于$f(x)$的最小根.

$f(x)$的根为$0<a_1<a_2<\cdots<a_k$，r_i为对应根a_i的重数

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_1}\cdot\frac{r_1+\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)^{n+1}r_2+\cdots+\left(\dfrac{a_1}{a_k}\right)^{n+1}r_k}{r_1+\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)^{n}r_2+\cdots+\left(\dfrac{a_1}{a_k}\right)^{n}r_k}=\frac{1}{a_1}\cdot\frac{r_1+0+\cdots+0}{r_1+0+\cdots+0}=\frac{1}{a_1}>0,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\ln\dfrac{c_2}{c_1}+\cdots+\ln\dfrac{c_n}{c_{n-1}}\right)=\ln\dfrac{1}{a_1}$

$f(x)$的最小根

$$\sqrt[n]{c_n}=\mathrm{e}^{\frac{\ln c_n}{n}}=\mathrm{e}^{\frac{\ln c_1}{n}+\frac{1}{n}\left(\ln\frac{c_2}{c_1}+\cdots+\ln\frac{c_n}{c_{n-1}}\right)}\to\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{a_1}}=\frac{1}{a_1},\quad \text{从而}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}=a_1.$$

六、（14分）



中国大学MOOC

(2019预赛，14分) 设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上具有连续导数，满足

$3\left[3+f^2(x)\right]f'(x)=2\left[1+f^2(x)\right]^2\mathrm{e}^{-x^2}$，且$f(0)\le 1$.

证明：存在常数$M>0$，使得$x\in[0,+\infty)$时，恒有$|f(x)|\le M$.

证　$f'(x)=\dfrac{2\left[1+f^2(x)\right]^2\mathrm{e}^{-x^2}}{3\left[3+f^2(x)\right]}>0$，所以$f(x)$是$[0,+\infty)$上的严格增函数，

故$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$(有限或为$+\infty$).　下面证$L\ne+\infty$.

记$y=f(x)$，则等式化为$3(3+y^2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2(1+y^2)^2\mathrm{e}^{-x^2}$，

分离变量并积分得　$\displaystyle\int\frac{3+y^2}{(1+y^2)^2}\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\int\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$,

设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上具有连续导数，满足$3\left[3+f^2(x)\right]f'(x)=2\left[1+f^2(x)\right]^2\mathrm{e}^{-x^2}$，且$f(0)\le 1$. 证明：存在常数$M>0$，使得$x\in[0,+\infty)$时，恒有$|f(x)|\le M$.

分离变量并积分得 $\displaystyle\int\frac{3+y^2}{(1+y^2)^2}\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\int\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x,$

$$\int\frac{3+y^2}{(1+y^2)^2}\mathrm{d}y=\int\left[\frac{2(1+y^2)}{(1+y^2)^2}+\frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}\right]\mathrm{d}y=\int\left[\frac{2}{1+y^2}+\frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}\right]\mathrm{d}y$$

则 $\displaystyle\frac{y}{1+y^2}+2\arctan y=\frac{2}{3}\int_0^x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+C,$ 其中$\displaystyle C=\frac{f(0)}{1+f^2(0)}+2\arctan f(0).$

若$L=+\infty$，则 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{y}{1+y^2}+2\arctan y\right)=\frac{2}{3}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t+C,$

利用$\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，得$\displaystyle 0+2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}+C,$ 从而$\displaystyle C=\pi-\frac{\sqrt{\pi}}{3}.$

设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上具有连续导数，满足$3\left[3+f^2(x)\right]f'(x)=2\left[1+f^2(x)\right]^2\mathrm{e}^{-x^2}$，且$f(0)\le 1$. 证明：存在常数$M>0$，使得$x\in[0,+\infty)$时，恒有$|f(x)|\le M$.

另一方面，令$g(u)=\dfrac{u}{1+u^2}+2\arctan u$，

$$C=\frac{f(0)}{1+f^2(0)}+2\arctan f(0).$$

则$g'(u)=\dfrac{3+u^2}{(1+u^2)^2}>0$，所以函数$g(u)$在$(-\infty,+\infty)$上严格单调增加.

因此，当$f(0)\le 1$时，$C=g(f(0))\le g(1)=\dfrac{1+\pi}{2}$，

$$C=\pi-\frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

但$C>\pi-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}=\dfrac{2\pi-\sqrt{\pi}}{2}>\dfrac{\pi+1}{2}$，矛盾，这就证明了$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$为有限数.

最后，取$M=\max\{|f(0)|,|L|\}$，则$|f(x)|\le M$，$\forall x\in[0,+\infty)$.

END



中国大学MOOC