全国大学生
数学竞赛



第10届决赛

中国大学MOOC

一、填空题

(本题满分30分，共5小题，每小题6分)

第1题



中国大学MOOC

(2019决赛，6分)

设函数 $y=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-a\sin^2 x}-b}{x^2}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$，在$x=0$处连续，则$a+b$的值为_____.

解　设$y=f(x)$，由$f(x)$在$x=0$处连续得$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$，

故有$\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1-a\sin^2 x}-b\right)=0$，从而$b=1$.

$x\to 0$时，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-a\sin^2 x}-b}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-a\sin^2 x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-a\sin^2 x}{2x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-ax^2}{2x^2}=-\frac{a}{2}=2$$

故有$a=-4$，因此$a+b=-3$.

故应填 -3

一、填空题

(本题满分30分，共5小题，每小题6分)

第2题



中国大学MOOC

(2019决赛，6分) 设$a>0$，则$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=$_____.

解 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\ln a+\ln t}{a^2(t^2+1)}\cdot a\mathrm{d}t$ 令$x=at$

$$=\frac{\ln a}{a}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t+\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\ln a}{a}\arctan t\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{a}\left[\int_0^1\frac{\ln t}{(t^2+1)}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{(t^2+1)}\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{\pi\ln a}{2a}+\frac{1}{a}\left[\int_0^1\frac{\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t\right]$$

设$a>0$，则$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=$_____.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi\ln a}{2a}+\frac{1}{a}\left[\int_0^1\frac{\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t\right]$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t=\int_1^0\frac{\ln\frac{1}{u}}{\frac{1}{u^2}+1}(-\frac{1}{u^2})\mathrm{d}u \qquad 令u=\frac{1}{t}$$

$$=-\int_0^1\frac{\ln u}{u^2+1}\mathrm{d}u=-\int_0^1\frac{\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

故 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi\ln a}{2a}.$

故应填$\frac{\pi\ln a}{2a}$

一、填空题

(本题满分30分，共5小题，每小题6分)

第3题

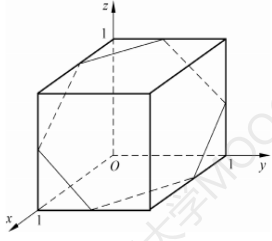


中国大学MOOC

(2019决赛，6分)

设曲线L是空间区域$0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$ 的表面与平面$x+y+z=\dfrac{3}{2}$的交线，则$\left|\oint_L (z^2-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-z^2)\mathrm{d}y+(y^2-x^2)\mathrm{d}z\right|=$_____.

解　如图所示，L所围的图形Σ是边长为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$的正六边形

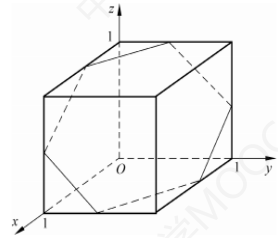


平面$x+y+z=\dfrac{3}{2}$的法向量为$\vec{n}=(1,1,1)$,

其方向余弦为$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$$\left|\oint_L (z^2-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-z^2)\mathrm{d}y+(y^2-x^2)\mathrm{d}z\right|=_____.$$

L方向余弦为$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　平面$x+y+z=\dfrac{3}{2}$



$$\left|\oint_L (z^2-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-z^2)\mathrm{d}y+(y^2-x^2)\mathrm{d}z\right|$$

$$=\left|\iint_\Sigma \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z^2-y^2 & x^2-z^2 & y^2-x^2 \end{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{d}S\right|$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\iint_\Sigma 4(x+y+z)\mathrm{d}S=\frac{\sqrt{3}}{3}\iint_\Sigma 4\cdot\frac{3}{2}\mathrm{d}S=2\sqrt{3}\iint_\Sigma \mathrm{d}S$$

$$=2\sqrt{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{9}{2}$$

故应填$\dfrac{9}{2}$

斯托克斯公式

$$\oint_\Gamma P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=$$

$$\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

一、填空题

(本题满分30分，共5小题，每小题6分)

第4题



中国大学MOOC

(2019决赛，6分)

设函数$z=z(x,y)$是由方程$F(x-y,z)=0$确定，其中$F(u,v)$具有二阶连续偏导数，则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$_____.

故应填 $\dfrac{F_1'^2F_{22}''-2F_1'F_2'F_{12}''+F_2'^2F_{11}''}{F_2'^3}$

解　方程$F(x-y,z)=0$关于x求导得 $F_1'+F_2'\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，　解得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_1'}{F_2'}$，

方程$F(x-y,z)=0$关于y求导，得 $-F_1'+F_2'\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，可得$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{F_1'}{F_2'}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F_1'}{F_2'}\right)=-\frac{\dfrac{\partial F_1'}{\partial y}\cdot F_2'-F_1'\cdot\dfrac{\partial F_2'}{\partial y}}{F_2'^2}$$

$$=-\frac{(-F_{11}''+F_{12}''\dfrac{\partial z}{\partial y})F_2'-F_1'(-F_{21}''+F_{22}''\dfrac{\partial z}{\partial y})}{F_2'^2}=\frac{F_1'^2F_{22}''-2F_1'F_2'F_{12}''+F_2'^2F_{11}''}{F_2'^3}$$

一、填空题

(本题满分30分，共5小题，每小题6分)

第5题



中国大学MOOC

(2019决赛，6分)

已知二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})^2$，则$f$的规范型为_____.

解 令$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，

$$f(x)=(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+n\bar{x}^2-2n\bar{x}^2$$

$$=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{n},\qquad f=xAx^T$$

设 $A=\begin{bmatrix}1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n}\\ -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n}\end{bmatrix}$，则$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\frac{1}{n}-\lambda & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n}\\ -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n}-\lambda & \cdots & -\frac{1}{n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n}-\lambda\end{vmatrix}$

已知二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})^2$，则$f$的规范型为_____.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda & \cdots & -\lambda \\ -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n}-\lambda & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n}-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n}-\lambda & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & 1-\frac{1}{n}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=-\lambda\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1-\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda\cdot(1-\lambda)^{n-1}=0,$$

故应填 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{n-1}^2$

解得$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n-1}=1,\ \lambda_n=0,$　　故f的规范形为$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{n-1}^2$.

二、（本题满分12分）



中国大学MOOC

(2019决赛，12分)

设$f(x)$在区间$(-1,1)$内三阶连续可导，满足$f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=0$，$f'''(0)=-1$；又设数列$\{a_n\}$满足$a_1\in(0,1), a_{n+1}=f(a_n), (n=1,2,\cdots\cdots)$，严格单调减少，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，计算$\lim\limits_{n\to\infty}na_n^2$.

分析 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n^2=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{a_{n+1}^2}-\dfrac{1}{a_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2a_{n+1}^2}{a_n^2-a_{n+1}^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2f^2(a_n)}{a_n^2-f^2(a_n)}$

Stolz定理$(\overset{*}{\underset{\infty}{—}})$ 设数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$满足：(1) $\{b_n\}$严格单调递增；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$

设$f(x)$在区间$(-1,1)$内三阶连续可导，满足$f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=0$，$f'''(0)=-1$；又设数列$\{a_n\}$满足$a_1\in(0,1)$，$a_{n+1}=f(a_n)$，$(n=1,2,\cdots\cdots)$，严格单调减少，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，计算$\lim\limits_{n\to\infty}na_n^2$.

解　由于$f(x)$在区间$(-1,1)$内三阶可导，$f(x)$在$x=0$处有泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3).$$

又$f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=0$，$f'''(0)=-1$，

所以　$f(x)=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$

$$\lim_{n\to\infty}na_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\dfrac{1}{a_n^2}}$$

由于$a_1\in(0,1)$，数列$\{a_n\}$严格单调且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则$a_n>0$，

且$\left\{\dfrac{1}{a_n^2}\right\}$为严格单调增加趋于正无穷的数列，

计算 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n^2$ $\qquad f(x)=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$

$$\lim_{n\to\infty} na_n^2=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\dfrac{1}{a_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{1}{a_{n+1}^2}-\dfrac{1}{a_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2a_{n+1}^2}{a_n^2-a_{n+1}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2f^2(a_n)}{a_n^2-f^2(a_n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2\left[a_n-\dfrac{1}{6}a_n^3+o(a_n^3)\right]^2}{a_n^2-\left[a_n-\dfrac{1}{6}a_n^3+o(a_n^3)\right]^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^4-\dfrac{1}{3}a_n^6+\dfrac{1}{36}a_n^8+o(a_n^8)}{\dfrac{1}{3}a_n^4-\dfrac{1}{36}a_n^6+o(a_n^6)}=3.$$

Stolz定理$(\overset{*}{\underset{\infty}{\frac{}{}}})$ 设数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$满足:(1) $\{b_n\}$严格单调递增;(2) $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$,

则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$

三、（本题满分12分）



中国大学MOOC

(2019决赛，12分)

设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有连续导数，且$|f(x)|\le 1$，$f'(x)>0$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

证明：对于$0<\alpha<\beta$，成立$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\alpha}^{\beta} f'(nx-\dfrac{1}{x})\,\mathrm{d}x=0.$

证　令$t(x)=x-\dfrac{1}{nx}$，则$t'(x)=1+\dfrac{1}{nx^2}>0$，故函数$t(x)$在$[\alpha,\beta]$上严格单增.

根据广义积分中值定理，存在$\xi_n\in[\alpha-\dfrac{1}{n\alpha},\beta-\dfrac{1}{n\beta}]$，

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(nx-\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x=\int_{\alpha-\frac{1}{n\alpha}}^{\beta-\frac{1}{n\beta}} f'(nt)x'(t)\,\mathrm{d}t \quad =x'(\xi_n)\int_{\alpha-\frac{1}{n\alpha}}^{\beta-\frac{1}{n\beta}} f'(nt)\,\mathrm{d}t$$

广义积分中值定理　设$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续，且$g(x)>0$,

则存在$\xi\in[a,b]$，使得$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有连续导数，且$|f(x)|\le 1$，$f'(x)>0$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

证明：对于$0<\alpha<\beta$，成立$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\alpha}^{\beta} f'(nx-\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x=0.$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(nx-\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x=x'(\xi_n)\int_{\alpha-\frac{1}{n\alpha}}^{\beta-\frac{1}{n\beta}} f'(nt)\,\mathrm{d}t=\frac{x'(\xi_n)}{n}\left[f(n\beta-\frac{1}{\beta})-f(n\alpha-\frac{1}{\alpha})\right]$$

因此 $\left|\int_{\alpha}^{\beta} f'(nx-\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x\right|\le\frac{|x'(\xi_n)|}{n}\left[|f(n\beta-\frac{1}{\beta})|+|f(n\alpha-\frac{1}{\alpha})|\right]\le\frac{2|x'(\xi_n)|}{n}.$

$x'(t)=\dfrac{1}{t'(x)}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{nx^2}}>0$，注意到 $0<x'(\xi_n)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n\xi_n^{\,2}}}<1$，

$t(x)=x-\dfrac{1}{nx}$

则 $\left|\int_{\alpha}^{\beta} f'(nx-\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x\right|\le\frac{2}{n}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\alpha}^{\beta} f'(nx-\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x=0$

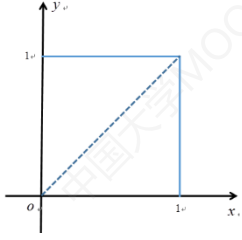
四、（本题满分12分）



中国大学MOOC

(2019决赛，12分)

计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$，其中$\Omega$: $0\le x\le 1, 0\le y\le 1, 0\le z\le 1$.



解 $I=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$，其中$D: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1$

$=2\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{D_1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$，其中$D_1: 0\le x\le 1, 0\le y\le x$

$=2\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sec\theta}\frac{r\mathrm{d}r}{(1+r^2+z^2)^2}=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{1+z^2}-\frac{1}{1+\sec^2\theta+z^2})\mathrm{d}\theta$

$=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+z^2}\mathrm{d}\theta-\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sec^2\theta+z^2}\mathrm{d}\theta=\int_0^1\frac{1}{1+z^2}\mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta-J$

$=\frac{\pi^2}{16}-J$

计算三重积分$\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$,其中$\Omega$:$0\le x\le 1,0\le y\le 1,0\le z\le 1$.

$$J=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sec^2\theta+z^2}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{1+\sec^2\theta+z^2}\mathrm{d}z$$

$$I=\frac{\pi^2}{16}-\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sec^2\theta+z^2}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 t}{\sec^2\theta+\sec^2 t}\mathrm{d}t$$ 作变量代换$z=\tan t$,

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta+\sec^2 t}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta+\sec^2 t}\mathrm{d}t$$

$$2J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta+\sec^2 t}{\sec^2\theta+\sec^2 t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{16},$$ 从而$J=\frac{\pi^2}{32}$

所以$I=\frac{\pi^2}{16}-J=\frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi^2}{32}=\frac{\pi^2}{32}$.

五、（本题满分12分）



中国大学MOOC

(2019决赛，12分) 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdots\cdot\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{1}{n+1}$之和.

解 $a_n=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdots\cdot\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2^n}$

$=\frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!\cdot(n+1)}(\frac{1}{\sqrt{2}})^{2n+2}$ 令 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!\cdot(n+1)}x^{2n+2}$,

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!\cdot(n+2)}\cdot\frac{(2n+1)!!\cdot(n+1)}{(2n)!!}x^2$

$=x^2\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(n+1)}{(2n+3)(n+2)}=x^2<1$ 则收敛区间为(−1,1),

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2f(\frac{1}{\sqrt{2}})-1$

求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdots\cdots\frac{3}{7}\cdot\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{1}{n+1}$之和.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!\cdot(n+1)}x^{2n+2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2f(\frac{1}{\sqrt{2}})-1$$

$$f'(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}=2\,g(x),\ \text{其中}\ g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}.$$

$$g'(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}=1+x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}2nx^{2n-1}$$

$$=1+x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}\right]=1+x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+2}\right]$$

$$=1+x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}\right]=1+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[xg(x)\right]=1+x\left[g(x)+xg'(x)\right]$$

求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdots\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{1}{n+1}$之和.

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2f(\frac{1}{\sqrt{2}})-1$$

$$g'(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}=1+x\left[g(x)+xg'(x)\right]$$

$$f'(x)=2g(x)$$

所以$g'(x)-\frac{x}{1-x^2}g(x)=\frac{1}{1-x^2}$，　且$g(0)=0$.

$$g(x)=e^{\int\frac{x}{1-x^2}dx}\left(\int\frac{1}{1-x^2}e^{-\int\frac{x}{1-x^2}dx}dx+C\right)=e^{-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)}\left[\int\frac{1}{1-x^2}e^{\frac{1}{2}\ln(1-x^2)}dx+C\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\int\frac{1}{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}\,dx+C\right]=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+C\right]$$

$$=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{C}{\sqrt{1-x^2}}.$$

中国大学MOOC

求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdots\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{1}{n+1}$之和.

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2f(\frac{1}{\sqrt{2}})-1$$

$$g'(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}=1+x\left[g(x)+xg'(x)\right]$$

$$f'(x)=2g(x)$$

$$g(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{C}{\sqrt{1-x^2}}.$$ 由$g(0)=0$得$C=0$，故 $g(x)=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$f'(x)=2g(x)=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$ 所以$f(x)=(\arcsin x)^2$，$f(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{\pi^2}{16}$,

故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2\cdot\frac{\pi^2}{16}-1=\frac{\pi^2-8}{8}.$

中国大学MOOC

六、（本题满分11分）



中国大学MOOC

(2019决赛，11分)

设A是n 阶幂零矩阵，即满足$A^2=0$. 证明：若A的秩为r，且$1\le r<\frac{n}{2}$，则存在n阶可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0 & E_r & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，其中$E_r$为$r$阶单位矩阵.

证　存在n阶可逆矩阵H、Q，使得$A=H\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q$,

由$A^2=0$得 $A^2=H\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}QH\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q=0$. 对$QH$作相应分块$QH=\begin{bmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{bmatrix}$,

则有$\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}QH\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}R_{11} & R_{12}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_{11} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0$,　　因此$R_{11}=0$.

设A是n阶幂零矩阵，即满足 $A^2=0$。证明：若A的秩为r, 且$1\le r<\dfrac{n}{2}$,

则存在n阶可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & E_r & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,其中$E_r$为$r$阶单位矩阵.

$QH=\begin{bmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{bmatrix}$ $R_{11}=0$ 存在n阶可逆矩阵H、Q，使得$A=H\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q$

从而$QH=\begin{bmatrix}0 & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{bmatrix}$，则$Q=\begin{bmatrix}0 & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{bmatrix}H^{-1}$

所以 $A=H\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q=H\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{bmatrix}H^{-1}=H\begin{bmatrix}0 & R_{12}\\ 0 & 0\end{bmatrix}H^{-1}.$

则$H^{-1}AH=\begin{bmatrix}0 & R_{12}\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$ 显然，$rank(A)=rank(R_{12})=r$，所以R_{12}为行满秩矩阵.

设A是n阶幂零矩阵，即满足 $A^2=0$。证明：若A的秩为r, 且$1\le r<\dfrac{n}{2}$,

则存在n阶可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & E_r & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,其中$E_r$为$r$阶单位矩阵.

$H^{-1}AH=\begin{bmatrix}0 & R_{12}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 显然，$rank(A)=rank(R_{12})=r$，所以R_{12}为行满秩矩阵.

因为$r<\dfrac{n}{2}$，所以存在可逆矩阵S_1、S_2，使得$S_1R_{12}S_2=[E_r\vdots 0]$. 令$P=H\begin{bmatrix}S_1^{-1} & 0\\ 0 & S_2\end{bmatrix}$,

则 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}S_1 & 0\\ 0 & S_2^{-1}\end{bmatrix}H^{-1}AH\begin{bmatrix}S_1^{-1} & 0\\ 0 & S_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_1 & 0\\ 0 & S_2^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & R_{12}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_1^{-1} & 0\\ 0 & S_2\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}0 & S_1R_{12}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_1^{-1} & 0\\ 0 & S_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & S_1R_{12}S_2\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & E_r & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

七、（本题满分11分）



中国大学MOOC

(2019决赛，11分)

设$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$为单调递减的正实数列，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$为一实数列，

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nu_n$收敛，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)u_n=0.$

分析　即证对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，有$\left|(a_1+a_2+\cdots+a_n)u_n\right|<\varepsilon.$

$$\left|(a_1+a_2+\cdots+a_n)u_n\right|=\left|(a_1+\cdots+a_{N_1-1})u_n+(a_{N_1}+\cdots+a_n)u_n\right|$$

$$\le\left|(a_1+\cdots+a_{N_1-1})u_n\right|+\left|(a_{N_1}+\cdots+a_n)u_n\right|=\left|\sum_{k=1}^{N_1-1}a_ku_n\right|+\left|\sum_{k=N_1}^{n}a_ku_n\right|$$

证 由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nu_n$收敛，根据柯西收敛准则，对任意给定$\varepsilon>0$，存在

自然数N_1，使得当$n>N_1$时，有$-\dfrac{\varepsilon}{2}<\sum\limits_{k=N_1}^{n}a_ku_k<\dfrac{\varepsilon}{2}$　　①

设$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$为单调递减的正实数列，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$为一实数列，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nu_n$收敛，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)u_n=0.$

令$A_0=0$，$A_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\quad(k=1,2,\cdots,n)$，可得 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k=A_nb_n+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})A_k$

……阿贝尔求和公式

事实上，当$m<n$时，有

$$\sum_{k=m}^{n}(A_k-A_{k-1})b_k=(A_m-A_{m-1})b_m+(A_{m+1}-A_m)b_{m+1}+(A_{m+2}-A_{m+1})b_{m+2}$$

$$+\cdots+(A_{n-1}-A_{n-2})b_{n-1}+(A_n-A_{n-1})b_n$$

$$=A_nb_n-A_{m-1}b_m+\sum_{k=m}^{n-1}(b_k-b_{k+1})A_k$$

令$A_0=0$，$A_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\quad(k=1,2,\cdots,n)$，得到 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k=A_nb_n+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})A_k$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)u_n=0.$

令$A_0=0$，$A_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\quad(k=1,2,\cdots,n)$，$\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k=A_nb_n+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})A_k$

下面证明：对于任意自然数n，如果$\{c_n\},\{b_n\}$满足$b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_n\geq 0$，

$m\leq c_1+c_2+\cdots+c_n\leq M$，则有 $b_1m\leq\sum\limits_{k=1}^{n}c_kb_k\leq b_1M.$

事实上，令$C_0=0$，$C_k=\sum\limits_{i=1}^{k}c_i\quad(k=1,2,\cdots,n)$，$\sum\limits_{k=1}^{n}c_kb_k=C_nb_n+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})C_k$，

则$m\leq C_k\leq M$，$b_k-b_{k+1}\geq 0$，

一方面，$\sum\limits_{k=1}^{n}c_kb_k=C_nb_n+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})C_k\geq mb_n+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})m$

$=m\left[b_n+(b_1-b_2)+(b_2-b_3)+\cdots+(b_{n-1}-b_n)\right]=mb_1$

另一方面，$\sum\limits_{k=1}^{n}c_kb_k=C_nb_n+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})C_k\leq Mb_n+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})M=Mb_1$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)u_n=0.$

对任意$\varepsilon>0$，存在自然数N_1，使得当$n>N_1$时，有 $-\dfrac{\varepsilon}{2}<\sum\limits_{k=N_1}^{n}a_ku_k<\dfrac{\varepsilon}{2}$ ①

$b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_n\geq 0$，$m\leq c_1+c_2+\cdots+c_n\leq M$，则有 $b_1m\leq\sum\limits_{k=1}^{n}c_kb_k\leq b_1M.$

因为$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$为单调递减的正数列，所以 $0<\dfrac{1}{u_{N_1}}\leq\dfrac{1}{u_{N_1+1}}\leq\cdots\leq\dfrac{1}{u_n}$ ②

利用②式，令$b_1=\dfrac{1}{u_n}$，$b_2=\dfrac{1}{u_{n-1}}$,…，　$c_k=a_ku_k$，$b_k=\dfrac{1}{u_k}$

可得 $-\dfrac{\varepsilon}{2}u_n^{-1}<\sum\limits_{k=N_1}^{n}a_k<\dfrac{\varepsilon}{2}u_n^{-1}$，　即$-\dfrac{\varepsilon}{2}<\sum\limits_{k=N_1}^{n}a_ku_n<\dfrac{\varepsilon}{2}$，　也即 $\left|\sum\limits_{k=N_1}^{n}a_ku_n\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}.$

设$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$为单调递减的正实数列，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$为一实数列，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nu_n$收敛，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)u_n=0.$

$$\left|(a_1+a_2+\cdots+a_n)u_n\right|\le\left|(a_1+\cdots+a_{N_1-1})u_n\right|+\left|(a_{N_1}+\cdots+a_n)u_n\right|$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{N_1-1}a_ku_n\right|+\left|\sum_{k=N_1}^{n}a_ku_n\right|$$

$$\left|\sum_{k=N_1}^{n}a_ku_n\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又由$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$知存在自然数$N_2$，使得当$n>N_2$时，有$\left|(a_1+a_2+\cdots+a_{N_1-1})u_n\right|\le\frac{\varepsilon}{2}$，

取$N=\max\{N_1,\ N_2\}$，当$n>N$时，有$\left|(a_1+a_2+\cdots+a_n)u_n\right|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，

因此$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)u_n=0.$

END



中国大学MOOC