全国大学生
数学竞赛



第10届预赛

中国大学MOOC

一、填空题

(本题满分24分，共4小题，每小题6分

第1题



中国大学MOOC

(2018预赛，6分)

设$\alpha \in (0,1)$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}((n+1)^{\alpha}-n^{\alpha})=$ _____.

解法一　由于$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha}<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$,

$$(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}=n^{\alpha}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1\right]<n^{\alpha}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]=\frac{1}{n^{1-\alpha}},$$

于是 $0<(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}<\dfrac{1}{n^{1-\alpha}}$,

根据夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}((n+1)^{\alpha}-n^{\alpha})=0$　故应填 0

设$\alpha \in (0,1)$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}((n+1)^{\alpha}-n^{\alpha})=$ _____.

解法二 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha}\cdot\left[(1+\frac{1}{n})^{\alpha}-1\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha}\cdot\alpha\frac{1}{n}$

$=\alpha\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1-\alpha}}=0$

$x\to 0$ 时，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$

故应填 0

一、填空题

(本题满分24分，共4小题，每小题6分

第2题



中国大学MOOC

(2018预赛，6分)

若曲线 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases} x=t+\cos t \\ \mathrm{e}^{y}+ty+\sin t=1 \end{cases}$ 确定，则此曲线在 $t=0$ 对应点处的切线方程为_____.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

解　当 $t=0$ 时，$x=1, y=0$,

对 $x=t+\cos t$ 两边关于 t 求导：$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1-\sin t$，　$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=1$,

对 $\mathrm{e}^{y}+ty+\sin t=1$ 两边关于 t 求导：

$$\mathrm{e}^{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y+t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\cos t=0,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=-1,\qquad \text{则}\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=0}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}\Big|_{t=0}=-1.$$

所以切线方程为 $y-0=-(x-1)$，即 $x+y-1=0$.

故应填 $x+y-1=0$

一、填空题

(本题满分24分，共4小题，每小题6分

第3题



中国大学MOOC

(2018预赛，6分)

不定积分 $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x = _____.$ $\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ $\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

解法一 $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x \overset{x=\tan t}{=} \int \frac{\ln(\tan t+\sec t)}{\sec t}\mathrm{d}t = \int \ln(\tan t+\sec t)\,\mathrm{d}\sin t$

$$= \sin t\,\ln(\tan t+\sec t) - \int \sin t\,\mathrm{d}\left[\ln(\tan t+\sec t)\right]$$

$$= \sin t \ln(\tan t+\sec t) - \int \sin t \frac{1}{\tan t+\sec t}(\sec^2 t+\tan t\sec t)\mathrm{d}t$$

$$= \sin t \ln(\tan t+\sec t) - \int \frac{\sin t}{\cos t}\mathrm{d}t = \sin t \ln(\tan t+\sec t) + \ln|\cos t| + C$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

不定积分 $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x = _____.$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

解法二 $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x = \int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

故应填 $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

中国大学MOOC

一、填空题

(本题满分24分，共4小题，每小题6分

第4题



中国大学MOOC

(2018预赛，6分)

极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=$ _____.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\dfrac{\cos x(1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}\right]$

$=\dfrac{1}{2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=\dfrac{1}{2}+\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}+\dfrac{\sqrt{\cos 2x}(1-\sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}\right]$

$=\dfrac{1}{2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+(\cos 2x-1)}}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1+(\cos 3x-1)}}{x^2}$

$=\dfrac{1}{2}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{2x^2}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{3x^2}$

$t\to 0$ 时，$\sqrt[n]{1+t}-1\sim\dfrac{1}{n}t$

极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=$ _____.

$$=\frac{1}{2}-\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{2x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-1}{3x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{3x^2}$$

$t\to 0$ 时，$1-\cos t\sim\dfrac{1}{2}t^2$

$$=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{2x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(3x)^2}{3x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}=3.$$

故应填 3

二、（本题满分8分）



中国大学MOOC

(2018预赛，8分)

设函数 $f(t)$ 在 $t \neq 0$ 时一阶连续可导，且 $f(1)=0$，求函数 $f(x^2-y^2)$，使得曲线积分 $\int_L \left[y(2-f(x^2-y^2)) \right] \mathrm{d}x + xf(x^2-y^2)\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 L 为任一不与直线 $y=\pm x$ 相交的分段光滑闭曲线.

解：设 $P(x,y)=y(2-f(x^2-y^2))$，$Q(x,y)=xf(x^2-y^2)$，

由曲线积分与路径无关得 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，即 $(x^2-y^2)f'(x^2-y^2)+f(x^2-y^2)=1$

记 $t=x^2-y^2$，则得 $tf'(t)+f(t)=1$，　即 $\left[tf(t)\right]'=1$，

解得 $tf(t)=t+C$，　由 $f(1)=0$ 可得 $C=-1$，

故 $f(t)=1-\dfrac{1}{t}$，　从而 $f(x^2-y^2)=1-\dfrac{1}{x^2-y^2}$.

三、（本题满分14分）



中国大学MOOC

(2018预赛，14分)

设$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，且$1\le f(x)\le 3$. 证明：$1\le \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\le \frac{4}{3}$

柯西不等式　设$f(x)$、$g(x)$在$[a,b]$上连续，则

$$\left[\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x\right]^2\le\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]\cdot\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]$$

证　由柯西不等式　$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\ge\left[\int_0^1\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{\frac{1}{f(x)}}\mathrm{d}x\right]^2=1.$

又由于$(f(x)-1)(f(x)-3)\le 0$，则$\frac{(f(x)-1)(f(x)-3)}{f(x)}\le 0,$

即$\frac{[f(x)]^2-4f(x)+3}{f(x)}\le 0,$　　即$f(x)+\frac{3}{f(x)}\le 4,$

设 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上连续，且$1\le f(x)\le 3$. 证明：$1\le \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\le \frac{4}{3}$

$f(x)+\frac{3}{f(x)}\le 4,$ 所以 $\int_0^1\left(f(x)+\frac{3}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\le 4.$ $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x\le\frac{1}{4}\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{3}{f(x)}\mathrm{d}x\right]^2$$

$$=\frac{1}{4}\left[\int_0^1\left(f(x)+\frac{3}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\right]^2\le\frac{4^2}{4}\le 4,$$ 从而 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\le\frac{4}{3}.$

故 $1\le\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\le\frac{4}{3}.$

四、（本题满分12分）



中国大学MOOC

(2018预赛，12分)

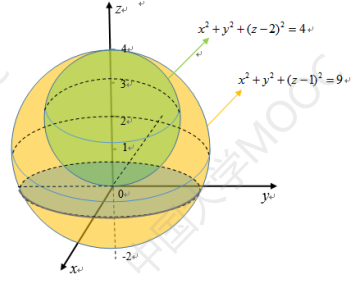
计算三重积分$\iiint_V (x^2+y^2)\mathrm{d}V$，其中$V$是由$x^2+y^2+(z-2)^2\geq 4$，$x^2+y^2+(z-1)^2\leq 9$，$z\geq 0$所围成的空心立体.

解：(1) V_1：$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \\ z-1=r\cos\varphi \end{cases}$ $0\leq r\leq 3,\ 0\leq\varphi\leq\pi,\ 0\leq\theta\leq 2\pi$

大球

$$\iiint_{V_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^3 r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=\frac{8}{15}3^5\cdot\pi$$



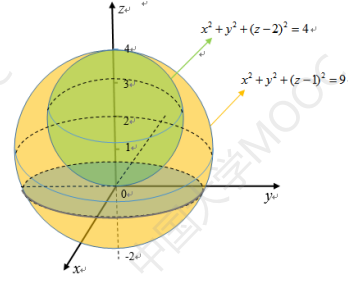
$$\iiint_V (x^2+y^2)\mathrm{d}V,\ \text{其中}\ (V): x^2+y^2+(z-2)^2 \geq 4,\ x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 9,\ z \geq 0$$

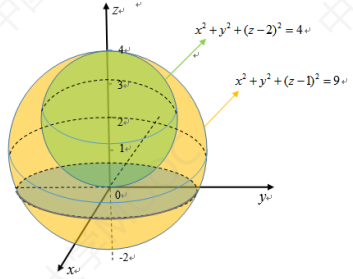
(2) V_2：$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z-2 = r\cos\varphi \end{cases}$ $0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \varphi \leq \pi,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$

小球

$$\iiint_{V_2} (x^2+y^2)\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2} r^2\sin^2\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$= \frac{8}{15}2^5\cdot\pi$$





$$\iiint_V (x^2+y^2)\mathrm{d}V,\ \text{其中}\ V: x^2+y^2+(z-2)^2 \geq 4,$$
$$x^2+y^2+(z-1)^2 \leq 9,\ z \geq 0$$

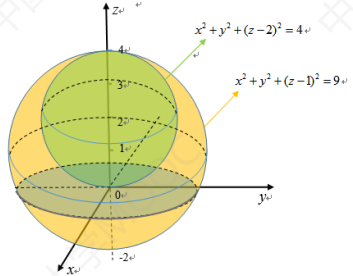
(3) V_3：
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ 1-\sqrt{9-r^2} \leq z \leq 0 \end{cases} \qquad 0 \leq r \leq 2\sqrt{2},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

大球*xOy*面下方

$$\iiint_{V_3} (x^2+y^2)\mathrm{d}V = \iint_{r\leq 2\sqrt{2}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \int_{1-\sqrt{9-r^2}}^{0} r^2\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{2}} r^3(\sqrt{9-r^2}-1)\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\left[\int_0^{2\sqrt{2}} r^3\sqrt{9-r^2}\,\mathrm{d}r - \int_0^{2\sqrt{2}} r^3\mathrm{d}r\right] = 2\pi\int_0^{2\sqrt{2}} r^3\sqrt{9-r^2}\,\mathrm{d}r - 32\pi$$

$$\underline{\underline{r^2=t}}\ \ \pi\int_0^8 t\sqrt{9-t}\,\mathrm{d}t - 32\pi = (\frac{4}{15}\cdot 3^5 - 32 - \frac{28}{5})\pi$$



$$\iiint_{V_3}(x^2+y^2)\mathrm{d}V \xlongequal{r^2=t} \pi\int_0^8 t\sqrt{9-t}\,\mathrm{d}t-32\pi$$

$$=(\frac{4}{15}\cdot 3^5-32-\frac{28}{5})\pi$$

$$\int_0^8 t\sqrt{9-t}\,\mathrm{d}t=\int_0^8(9-t-9)\sqrt{9-t}\,\mathrm{d}(9-t)=\int_0^8(9-t)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}(9-t)-9\int_0^8(9-t)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(9-t)$$

$$=\frac{2}{5}(9-t)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^8-9\cdot\frac{2}{3}(9-t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^8=\frac{4}{15}\cdot 3^5-\frac{28}{5}$$

$$\iiint_V(x^2+y^2)\mathrm{d}V=\iiint_{V_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}V-\iiint_{V_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}V-\iiint_{V_3}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$$

$$=\frac{8}{15}3^5\cdot\pi-\frac{8}{15}2^5\cdot\pi-(124-\frac{2}{5}3^5+\frac{2}{5})\pi=\frac{256}{3}\pi$$

五、（本题满分14分）



中国大学MOOC

(2018预赛，14分)

设 $f(x,y)$ 在区域 D 内可微，且 $\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2}\le M$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 是 D 内两点，线段 AB 包含在 D 内. 证明：$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\le M|AB|$，其中 $|AB|$ 表示线段 AB 的长度.

分析　$M|AB|\leftrightarrow\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2}\cdot\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

构造 $\varphi(t)=f\left[x_1+t(x_2-x_1),y_1+t(y_2-y_1)\right]$，$\varphi(1)=f(x_2,y_2)$，$\varphi(0)=f(x_1,y_1)$

证　作辅助函数 $\varphi(t)=f\left[x_1+t(x_2-x_1),y_1+t(y_2-y_1)\right]$,

显然 $\varphi(t)$ 在 $[0,1]$ 上可导. 根据拉格朗日中值定理，存在 $c\in(0,1)$,

使得 $\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(c)=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}(x_2-x_1)+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}(y_2-y_1)$

设 $f(x,y)$ 在区域 D 内可微，且 $\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2}\le M$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 是 D 内两点，线段 AB 包含在 D 内. 证明：$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\le M|AB|$，其中 $|AB|$ 表示线段 AB 的长度.

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(c)=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}(x_2-x_1)+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}(y_2-y_1)$$

$$|\varphi(1)-\varphi(0)|=|f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)|=\left|\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}(x_2-x_1)+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}(y_2-y_1)\right|$$

$$\le\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial u})^2+(\frac{\partial f}{\partial v})^2}\cdot\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\le M|AB|$$

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\le\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$$

六、（本题满分14分）



中国大学MOOC

(2018预赛，14分) 证明：对于连续函数$f(x)>0$，有$\ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x$.

证　由$f(x)$在$[0,1]$上连续，得$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)$，其中$x_k \in \left[\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right]$.

由$\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots\cdots f(x_n)} \leq \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)$,

根据$\ln x$单调递增可知　$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln f(x_k) \leq \ln\left[\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\right]$,

两边取极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln f(x_k)\right] \leq \lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\right]$

得$\ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x$

$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdots\cdots x_n} \leq \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$　几何平均数 ≤ 算术平均数

七、（本题满分14分）



中国大学MOOC

(2018预赛，14分)

几何平均数≤算术平均数

已知$\{a_n\},\{b_n\}$是正项数列，且$b_{k+1}-b_k\geq\delta>0$，$k=1,2,\cdots\cdots$，δ为一常数.

证明：若级数$\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$收敛，则级数$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$收敛.

分析 $\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}\leq\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k}{b_{k+1}b_k}=\frac{S_k}{b_{k+1}b_k}$

证法一 令$S_k=\sum_{i=1}^{k}a_ib_i$，$a_kb_k=S_k-S_{k-1}$，记$S_0=0$，$a_k=\frac{S_k-S_{k-1}}{b_k}$，$k=1,2,\cdots$

$$\sum_{k=1}^{N}a_k=\sum_{k=1}^{N}\frac{S_k-S_{k-1}}{b_k}=\frac{S_1-S_0}{b_1}+\frac{S_2-S_1}{b_2}+\frac{S_3-S_2}{b_3}+\cdots+\frac{S_N-S_{N-1}}{b_N}$$

$$=\left(\frac{S_1}{b_1}-0\right)+\left(\frac{S_2}{b_2}-\frac{S_1}{b_2}\right)+\left(\frac{S_3}{b_3}-\frac{S_2}{b_3}\right)+\cdots+\left(\frac{S_N}{b_N}-\frac{S_{N-1}}{b_N}\right)$$

已知$\{a_n\},\{b_n\}$是正项数列，且$b_{k+1}-b_k \geq \delta > 0$，$k=1,2,\cdots\cdots$，$\delta$为一常数.

证明：若级数$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$收敛，则级数$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$收敛.

$$\sum_{k=1}^{N} a_k = \left(\frac{S_1}{b_1}-0\right)+\left(\frac{S_2}{b_2}-\frac{S_1}{b_2}\right)+\left(\frac{S_3}{b_3}-\frac{S_2}{b_3}\right)+\cdots+\left(\frac{S_N}{b_N}-\frac{S_{N-1}}{b_N}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{S_k}{b_k}-\frac{S_k}{b_{k+1}}\right)+\frac{S_N}{b_N}=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{b_{k+1}-b_k}{b_kb_{k+1}}S_k+\frac{S_N}{b_N}>\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\delta}{b_kb_{k+1}}S_k$$

所以$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{S_k}{b_kb_{k+1}}$收敛

由不等式$\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)} \leq \frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots a_kb_k}{k}=\frac{S_k}{k}$

知$\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k} \leq \frac{S_k}{b_{k+1}b_k}$，故结论成立

已知$\{a_n\},\{b_n\}$是正项数列，且$b_{k+1}-b_k\geq\delta>0$，$k=1,2,\cdots\cdots$，δ为一常数.

证明：若级数$\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$收敛，则级数$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$收敛.

证法二 $\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}\leq\frac{k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\cdot\sqrt[k]{b_k^k}}{b_{k+1}b_k}=\frac{k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\cdot b_k}{b_{k+1}b_k}$

$=\frac{k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}}{b_{k+1}}<\frac{1}{\delta}\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}$

$b_{k+1}-b_k\geq\delta$，$b_k-b_{k-1}\geq\delta$，$b_{k-1}-b_{k-2}\geq\delta,\cdots$，$b_2-b_1\geq\delta$

叠加得 $b_{k+1}-b_1\geq k\delta\Rightarrow b_{k+1}\geq k\delta+b_1>k\delta\Rightarrow\frac{k}{b_{k+1}}<\frac{1}{\delta}$

已知$\{a_n\},\{b_n\}$是正项数列，且$b_{k+1}-b_k \geq \delta > 0$，$k=1,2,\cdots\cdots$，$\delta$为一常数.

证明：若级数$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$收敛，则级数$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$收敛.

因为$\sqrt[k]{a_1a_2\cdots\cdots a_k} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$ (几何平均值不大于算术平均值)

所以$\frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k} < \frac{1}{\delta}\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k} \leq \frac{1}{\delta}\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$

由$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$收敛知$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$，从而$\lim_{k\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k} = \lim_{k\to\infty} a_k = 0$

这说明$k\to\infty$时，$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k} \sim a_k$，即$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}}{a_k} = 1$,

已知$\{a_n\},\{b_n\}$是正项数列，且$b_{k+1}-b_k \geq \delta > 0$，$k=1,2,\cdots\cdots$，$\delta$为一常数.

证明：若级数$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$收敛，则级数$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$收敛.

由正项级数比较审敛法极限形式知$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$与$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$敛散性一致，

从而$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$收敛.

由$\dfrac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k} < \dfrac{1}{\delta}\cdot\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$，

根据正项级数比较审敛法知级数$\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$收敛.

END



中国大学MOOC