全国大学生
数学竞赛



第1届决赛

中国大学MOOC

一、计算下列各题

(本题共4个小题，每小题5分，共20分)

(要求写出重要步骤)

第1题



中国大学MOOC

(2010决赛, 5分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\sin\dfrac{k\pi}{n^2}$.

解　记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\sin\dfrac{k\pi}{n^2}$, 则

$$S_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left[\frac{k\pi}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{k\pi}{n^2}+\frac{k^2\pi}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}k+\frac{\pi}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right),\ x\in(-\infty,+\infty)$$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\sin\dfrac{k\pi}{n^2}.$

$S_n=\dfrac{\pi}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n-1}k+\dfrac{\pi}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}k=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^2}\left[1+2+\cdots+(n-1)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^3}\left[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^3}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)=\frac{\pi}{3}$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\sin\dfrac{k\pi}{n^2}=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{6}$

一、计算下列各题

(本题共4个小题，每小题5分，共20分)

(要求写出重要步骤)

第2题



中国大学MOOC

(2010决赛，5分) 计算$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中Σ为下半球面

$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧，$a>0$.

解　$I=\dfrac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\dfrac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma}(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_1+I_2$

若Σ：$x=x(y,z)$(单值)，则

$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pm\iint\limits_{D_{yz}}P[x(y,z),y,z]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，前侧+，后侧−.

Σ_{11}：$x=\sqrt{a^2-(y^2+z^2)}$，后侧；Σ_{12}：$x=-\sqrt{a^2-(y^2+z^2)}$，前侧；

D_{yz}：$y^2+z^2\le a^2, z\le 0$

计算$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中$\Sigma$为下半球面$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧

Σ_{11}：$x=\sqrt{a^2-(y^2+z^2)}$，后侧；Σ_{12}：$x=-\sqrt{a^2-(y^2+z^2)}$，前侧；

$$I_1=\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma_{11}}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma_{12}}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

D_{yz}：$y^2+z^2\le a^2, z\le 0$

$$=-\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{a^2-(y^2+z^2)}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{D_{yz}}\left[-\sqrt{a^2-(y^2+z^2)}\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=-2\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{a^2-(y^2+z^2)}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=-2\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}r\mathrm{d}r=-\frac{2}{3}\pi a^3.$$

$$I=\frac{1}{a}\iint_{\Sigma} ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{a}\iint_{\Sigma}(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_1+I_2$$

Σ：$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧

$$I_1=-\frac{2}{3}\pi a^3$$

若Σ：$z=z(x,y)$(单值)，则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}} R\left[x,y,z(x,y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad \text{上侧}+,\quad \text{下侧}-.$$

$$I_2=\frac{1}{a}\iint_{\Sigma}(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{a}\iint_{D_{xy}}\left[a-\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}\right]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad D_{xy}:\ x^2+y^2\le a^2$$

$$=\frac{1}{a}\iint_{D_{xy}}\left[2a^2-2a\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}-(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a(2a^2-2a\sqrt{a^2-r^2}-r^2)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{6}a^3.\quad \therefore\quad I=I_1+I_2=-\frac{\pi}{2}a^3.$$

一、计算下列各题

(本题共4个小题，每小题5分，共20分)

(要求写出重要步骤)

第3题



中国大学MOOC

(2010决赛, 5分)

现要设计一个容积为V的圆柱体容器. 已知上下两底的材料费为单位面积a元, 而侧面的材料费为单位面积b元. 试给出最节省的设计方案, 即高与上、下底的直径之比为何值时所需费用最少?

解　设圆柱体容器的高为h, 上下底的半径为r, 则有 $\pi r^2 h = V$, 或$h = \dfrac{V}{\pi r^2}$,

所需费用为 $F(r) = 2a\pi r^2 + 2b\pi rh = 2a\pi r^2 + \dfrac{2bV}{r}$.

令$F'(r) = 4a\pi r - \dfrac{2bV}{r^2} = 0$, 也即$r^3 = \dfrac{bV}{2a\pi}$.

这时高与底的直径之比为$\dfrac{h}{2r} = \dfrac{\dfrac{V}{\pi r^2}}{2r} = \dfrac{V}{2\pi}\cdot\dfrac{1}{r^3} = \dfrac{V}{2\pi}\cdot\dfrac{2a\pi}{bV} = \dfrac{a}{b}$.

一、计算下列各题

(本题共4个小题，每小题5分，共20分)

(要求写出重要步骤)

第4题



中国大学MOOC

(2010决赛, 5分) 已知$f(x)$在$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$内满足$f'(x)=\frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x}$，求$f(x)$.

解 $\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x)$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)(1-\sin x\cos x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)(1-\frac{1}{2}\sin 2x)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\left[1-\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2}-2x)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\left\{1-\frac{1}{2}\left[(1-2\sin^2(\frac{\pi}{4}-x)\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\left[\frac{1}{2}+\sin^2(\frac{\pi}{4}-x)\right]$$

已知$f(x)$在$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$内满足$f'(x)=\frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x}$，求$f(x)$.

$$\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\left[\frac{1}{2}+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]$$

得 $I=\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\left[\frac{1}{2}+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]}$. 令$u=\frac{\pi}{4}-x$，得

$$I=-\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{\cos u\cdot\left(\frac{1}{2}+\sin^2 u\right)}=-\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}\sin u}{\cos^2 u\cdot\left(\frac{1}{2}+\sin^2 u\right)}$$ 令$t=\sin u$

$$=-\sqrt{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\left(1-t^2\right)\left(\frac{1}{2}+t^2\right)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left[\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}-\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\frac{1}{2}}\right]$$

已知$f(x)$在$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$内满足$f'(x)=\frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x}$，求$f(x)$.

$$I=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left[\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}-\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\sqrt{2}\arctan\sqrt{2}t\right]+C$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\right|-\frac{4}{3}\arctan\left[\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]+C.$$

二、(小题(1) 4分，

小题(2) 6分,共10分)



中国大学MOOC

(2010决赛,4分) 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}\right]$.

$\infty\cdot 0$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$u\to 0$时，$\mathrm{e}^u-1\sim u$

解　因为

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}=\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-\mathrm{e}\quad=\mathrm{e}^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}-\mathrm{e}$$

$$=\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)=\mathrm{e}\left[-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

因此　$\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}\right]=\lim\limits_{n\to\infty} n\mathrm{e}\left[-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]=-\frac{\mathrm{e}}{2}.$

(2010决赛,6分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^{n}$，其中 $a>0$，$b>0$，$c>0$.

1^{∞}

解法一 $a^{\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^{\ln a^{\frac{1}{n}}}=\mathrm{e}^{\frac{\ln a}{n}}=1+\dfrac{1}{n}\ln a+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$，$n\to+\infty$，

$$\mathrm{e}^{x}=1+x+\frac{1}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{1}{n!}x^{n}+o(x^{n})$$

$$b^{\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^{\frac{\ln b}{n}}=1+\frac{1}{n}\ln b+o\left(\frac{1}{n}\right),\quad n\to+\infty,$$

$$c^{\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^{\frac{\ln c}{n}}=1+\frac{1}{n}\ln c+o\left(\frac{1}{n}\right),\quad n\to+\infty,$$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^n$

因此 $\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}=\dfrac{1}{3}\left(a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}\right)$

$$=\frac{1}{3}\left[3+\frac{1}{n}\ln a+\frac{1}{n}\ln b+\frac{1}{n}\ln c+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=1+\frac{1}{n}\ln\sqrt[3]{abc}+o\left(\frac{1}{n}\right),\quad n\to+\infty,$$

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^n=\left[1+\frac{1}{n}\ln\sqrt[3]{abc}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n.\qquad \text{令}\alpha_n=\frac{1}{n}\ln\sqrt[3]{abc}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

上式可改写成 $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^n=(1+\alpha_n)^n=\left[(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}\right]^{n\alpha_n}.$

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^n=\left[(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}\right]^{n\alpha_n}.$$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^n$

显然 $(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}\to \mathrm{e}$，$n\to+\infty$，

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\mathrm{e}$$

$n\alpha_n\to \ln\sqrt[3]{abc}$，$n\to+\infty$，

$$\lim\left[f(x)^{g(x)}\right]=\left[\lim f(x)\right]^{\lim g(x)}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^n=\mathrm{e}^{\ln\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}.$

中国大学MOOC

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^n$

解法二　设 $y=\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^n$　1^∞

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln y=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\ln\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}})-\ln 3}{\frac{1}{n}}$　令 $\dfrac{1}{n}=x$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a^x+b^x+c^x)-\ln 3}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x\ln a+b^x\ln b+c^x\ln c}{a^x+b^x+c^x}=\dfrac{\ln a+\ln b+\ln c}{3}$

$=\ln\sqrt[3]{abc}.$　所以 $\lim\limits_{n\to\infty}y=\sqrt[3]{abc}.$

三、（10分）



中国大学MOOC

(2010决赛,10分)

设$f(x)$在点$x=1$附近有定义，且在点$x=1$可导，$f(1)=0$，$f'(1)=2$.

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2+x\tan x}$. $\dfrac{0}{0}$

解　由题设可知 $\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{f(y)-f(1)}{y-1}=\lim\limits_{y\to 1}\dfrac{f(y)}{y-1}=f'(1)=2.$

令$y=\sin^2 x+\cos x$，那么当$x\to 0$时$y=\sin^2 x+\cos x\to 1$，

故上式有　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{\sin^2 x+\cos x-1}=2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2+x\tan x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2+x\tan x}\right)$$

设$f(x)$在点$x=1$附近有定义，且在点$x=1$可导，$f(1)=0$，$f'(1)=2$.

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2+x\tan x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2+x\tan x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2+x\tan x}\right)$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2+x\tan x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x\tan x}$$

$$=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\dfrac{\tan x}{x}}$$

$$=2(1-\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

四、（10分）



中国大学MOOC

(2010决赛,10分)

设$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，无穷积分$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，求 $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1}{y}\int_0^y xf(x)\mathrm{d}x.$

解　设$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = l$，并令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$

这时，$F'(x)=f(x)$，并有 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=l.$

对于任意的$y>0$，有

$$\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{y}\int_0^y x\mathrm{d}F(x)$$

$$=\frac{1}{y}xF(x)\Big|_{x=0}^{x=y}-\frac{1}{y}\int_0^y F(x)\mathrm{d}x=F(y)-\frac{1}{y}\int_0^y F(x)\mathrm{d}x.$$

设$f(x)$在点$[0,+\infty)$上连续，无穷积分$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，求$\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1}{y}\int_0^y xf(x)\mathrm{d}x$.

设$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = l$，并令$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$

$$\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)\mathrm{d}x = F(y) - \frac{1}{y}\int_0^y F(x)\mathrm{d}x$$

根据洛必达法则和变上限积分的求导公式得

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y F(x)\mathrm{d}x = \lim_{y\to+\infty} F(y) = l,$$

因此 $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1}{y}\int_0^y xf(x)\mathrm{d}x = l - l = 0.$

五、（12分）



中国大学MOOC

(2010决赛,10分)

设函数$f(x)$在$[0,1]$连续，在$(0,1)$内可微，且$f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$.

证明：（1）存在$\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$使得$f(\xi)=\xi$;

（2）存在$\eta\in(0,\ \xi)$使得$f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

证 (1) 令$F(x)=f(x)-x$，则$F(x)$在$\left(\frac{1}{2},1\right)$上连续，

且有 $F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0$，$F(1)=-1<0$

所以存在一个$\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=\xi$.

设函数$f(x)$在$[0,1]$连续，在$(0,1)$内可微，且$f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$.

证明：（1）存在$\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$使得$f(\xi)=\xi$;

（2）存在$\eta\in(0,\ \xi)$使得$f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

（2） 分析：构造辅助函数

$$f'(x)=f(x)-x+1\ \Rightarrow f'(x)-1=f(x)-x$$

$$\Rightarrow\frac{f'(x)-1}{f(x)-x}=1\ \Rightarrow\ln[f(x)-x]=x+\ln C$$

$$\Rightarrow \mathrm{e}^{-x}[f(x)-x]=C$$

设函数$f(x)$在$[0,1]$连续，在$(0,1)$内可微，且$f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$.

证明：（1）存在$\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$使得$f(\xi)=\xi$;

（2）存在$\eta\in(0,\ \xi)$使得$f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

（2）令$G(x)=\mathrm{e}^{-x}[f(x)-x]$，那么$G(0)=G(\xi)=0$.

这样，存在一个$\eta\in(0,\ \xi)$，使得$G'(\eta)=0$，

即 $G'(\eta)=\mathrm{e}^{-\eta}[f'(\eta)-1]-\mathrm{e}^{-\eta}[f(\eta)-\eta]=0$,

也即$f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

六、（14分）



中国大学MOOC

(2010决赛, 14分)

设$n>1$为整数，$F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}t$. 证明：方程$F(x)=\frac{n}{2}$在$\left(\frac{n}{2},\ n\right)$内至少有一个根.

证　因为 $\mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)=\mathrm{e}^{-t}\cdot\left[\mathrm{e}^{t}-R_n(t)\right]=1-\mathrm{e}^{-t}R_n(t)<1,\ \ \forall t>0,$

故有 $F(\frac{n}{2})=\int_0^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}t<\int_0^{\frac{n}{2}}1\mathrm{d}t=\frac{n}{2}.$

下面只需证明$F(n)>\frac{n}{2}$即可.

$$\mathrm{e}^{t}=1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+R_n(t),\ \ R_n(t)>0$$

$F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}t$, 证明$F(x)=\frac{n}{2}$在$\left(\frac{n}{2},\ n\right)$内至少有一个根.

下面只需证明$F(n)>\frac{n}{2}$即可.

$$F(n)=\int_0^n \mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}t=-\int_0^n\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t}$$

$$=-\mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)\Bigg|_0^n+\int_0^n \mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)\mathrm{d}t$$

$$=1-\mathrm{e}^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)+\int_0^n \mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)\mathrm{d}t$$

$$=1-\mathrm{e}^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)-\int_0^n\left[1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right]\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t}=\cdots\cdots$$

$F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}t$, 证明$F(x)=\frac{n}{2}$在$\left(\frac{n}{2},\ n\right)$内至少有一个根.

$$F(n)=1-\mathrm{e}^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)-\int_0^n\left[1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right]\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t}=\cdots\cdots$$

$$=1-\mathrm{e}^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)+1-\mathrm{e}^{-n}\left[1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\right]$$

$$+\cdots\cdots+1-\mathrm{e}^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}\right)+1-\mathrm{e}^{-n}.$$

$$\int_0^n \mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}\right)\mathrm{d}t=-\int_0^n\left(1+\frac{t}{1!}\right)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t}=-(1+t)\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^n+\int_0^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=1-\mathrm{e}^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}\right)+1-\mathrm{e}^{-n}$$

记$a_i=\frac{n^i}{i!}$，那么$a_0=1<a_1<a_2<\cdots<a_n$，我们观察下面的方阵

$F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}t$, 证明$F(x)=\frac{n}{2}$在$\left(\frac{n}{2},\ n\right)$内至少有一个根.

$$F(n)=n+1-\mathrm{e}^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)-\mathrm{e}^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\cdots+\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\right)+\cdots\cdots-\mathrm{e}^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}\right)-\mathrm{e}^{-n}$$

记$a_i=\frac{n^i}{i!}$，那么$a_0=1<a_1<a_2<\cdots<a_n$

$$F(n)=n+1-\mathrm{e}^{-n}\left[\left(a_0+a_1+\cdots+a_n\right)+\left(a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}\right)+\cdots\cdots+\left(a_0+a_1\right)+a_0\right]$$

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ a_0 & 2a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & 2a_n \end{bmatrix}$$

矩阵元素之和 $(n+2)(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)=(n+2)\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)$.

$F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}t$, 证明$F(x)=\frac{n}{2}$在$\left(\frac{n}{2},\ n\right)$内至少有一个根.

$$F(n)=n+1-\left[\mathrm{e}^{-n}\left(a_0+a_1+\cdots+a_n\right)+\mathrm{e}^{-n}\left(a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}\right)+\cdots\cdots+\left(a_0+a_1\right)+a_0\right]$$

矩阵元素之和 $(n+2)(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)=(n+2)\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right).$

得 $F(n)>n+1-\frac{(2+n)}{2}\mathrm{e}^{-n}\left(1+\frac{n}{1!}+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)>n+1-\frac{2+n}{2}=\frac{n}{2}.$

$F(\frac{n}{2})=\int_0^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}t<\int_0^{\frac{n}{2}}1\mathrm{d}t=\frac{n}{2}.$ 令$G(x)=F(x)-\frac{n}{2}$,

由$G(\frac{n}{2})<0$，$G(n)>0$，根据根的存在定理得$G(x)=0$在$\left(\frac{n}{2},\ n\right)$内至少有一个根.

七、（12分）



中国大学MOOC

(2010决赛,12分)

是否存在$\mathbf{R}^1$中的可微函数$f(x)$使得 $f(f(x))=1+x^2+x^4-x^3-x^5$.

若存在，请给出一个例子；若不存在，请给出证明.

解　不存在.

解法1　假设存在$\mathbf{R}^1$中的可微函数$f(x)$使得

$$f(f(x))=1+x^2+x^4-x^3-x^5.$$

考虑方程 $f(f(x))=x$，即$1+x^2+x^4-x^3-x^5=x$

$$\Rightarrow(1+x^2+x^4)-x(1+x^2+x^4)=0 \Rightarrow(1-x)(1+x^2+x^4)=0.$$

此方程有唯一的实数根$x=1$，即$f(f(x))$有唯一不动点$x=1$.

是否存在$\mathbf{R}^1$中的可微函数$f(x)$使得 $f(f(x))=1+x^2+x^4-x^3-x^5$.
若存在，请给出一个例子；若不存在，请给出证明.

此方程有唯一的实数根$x=1$，即$f(f(x))$有唯一不动点$x=1$.

下面说明$x=1$也是$f(x)$的不动点.

事实上，令$f(1)=t$，则$f(t)=f(f(1))=1$，$f(f(t))=f(1)=t$，因此$t=1$.

记$g(x)=f(f(x))$，则一方面 $\left[g(x)\right]'=\left[f(f(x))\right]'=f'(f(x))\cdot f'(x)$

$\Rightarrow g'(1)=f'(f(1))\cdot f'(1)=f'(1)\cdot f'(1)=\left(f'(1)\right)^2\geq 0.$

另一方面$g'(x)=(1+x^2+x^4-x^3-x^5)'=2x+4x^3-3x^2-5x^4$,

从而$g'(1)=-2$.矛盾.

所以，不存在$\mathbf{R}^1$中的可微函数$f(x)$使得$f(f(x))=1+x^2+x^4-x^3-x^5$.证毕.

是否存在$\mathbf{R}^1$中的可微函数$f(x)$使得 $f(f(x))=1+x^2+x^4-x^3-x^5$.
若存在，请给出一个例子；若不存在，请给出证明.

解法2　满足条件的函数不存在，理由如下：

首先，不存在$x_k \to +\infty$，使$f(x_k)$有界，

否则$f(f(x_k))=1+x_k^2+x_k^4-x_k^3-x_k^5$有界，矛盾.　因此　$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$.

从而由连续函数的介值性有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$或 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))=\lim\limits_{y\to+\infty} f(y)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+x^2+x^4-x^3-x^5\right)=-\infty$，即 $\lim\limits_{y\to+\infty} f(y)=-\infty$，矛盾.

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))=\lim\limits_{y\to-\infty} f(y)=+\infty$，矛盾.

因此，无论那种情况都不可能.

八、（12分）



中国大学MOOC

(2010决赛,12分)

设$f(x)$在$[0,+\infty)$上一致连续，且对于固定的$x\in[0,+\infty)$，当自然数$n\to+\infty$时，$f(x+n)\to 0$.证明：函数序列$\{f(x+n)\,|\,n=1,2,\cdots\}$在$[0,1]$上一致收敛于0.

分析　证当$x\in[0,1]$时，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，有$|f(x+n)-0|<\varepsilon$

$$|f(x+n)-0|\le|f(x+n)-f(x_j+n)|+|f(x_j+n)|.$$

证　由于$f(x)$在$[0,+\infty)$上一致连续，故对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，

使得当$|x_1-x_2|<\delta$，$x_1\ge 0$，$x_2\ge 0$时，有$|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

取一个充分大的自然数m，使得$m>\delta^{-1}$，并且在$[0,1]$中取m个点

$x_1=0<x_2<\cdots<x_m=1$，其中$x_j=\dfrac{j}{m}\left(j=1,2,\cdots,\ m\right)$.

设$f(x)$在$[0,+\infty)$上一致连续，且对于固定的$x\in[0,+\infty)$，当自然数$n\to+\infty$时，$f(x+n)\to 0$.证明：函数序列$\{f(x+n)\,|\,n=1,2,\cdots\}$在$[0,1]$上一致收敛于0.

这样，对于每一个j，　$|x_{j+1}-x_j|=\dfrac{1}{m}<\delta.$

又由于$\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0$,

故对于每一个x_j，存在一个N_j，使得当$n>N_j$时，　$|f(x_j+n)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$,

这里的ε是前面给定的.

取$N=\max\{N_1,\ N_2,\cdots,\ N_m\}$，则当$n>N$时，$|f(x_j+n)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，　……①

其中$j=1,2,\cdots,\ m.$

设$x\in[0,1]$是任意一点，这时总有一个x_j使得$x\in[x_j,\ x_{j+1}]$.

设$f(x)$在$[0,+\infty)$上一致连续，且对于固定的$x\in[0,+\infty)$，当自然数$n\to+\infty$时，$f(x+n)\to 0$.证明：函数序列$\{f(x+n)|n=1,2,\cdots\}$在$[0,1]$上一致收敛于0.

取$N=\max\{N_1,\ N_2,\cdots,\ N_m\}$，则当$n>N$时，$|f(x_j+n)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，……①

由$f(x)$在$[0,+\infty)$上一致连续及$|x-x_j|<\delta$知 $|f(x_j+n)-f(x+n)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，……②

$\forall n=1,2,\cdots.$

当$n>N$，$x\in[0,1]$时，

$$|f(x+n)|=\left|\left[f(x+n)-f(x_j+n)\right]+f(x_j+n)\right|\le|f(x+n)-f(x_j+n)|+|f(x_j+n)|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

注意到这里N的选取与点x无关，

这就证明了函数序列$\{f(x+n)|n=1,2,\cdots\}$在$[0,1]$上一致收敛于0.

END



中国大学MOOC