全国大学生
数学竞赛



第1届预赛

中国大学MOOC

一、填空题

(本题共4个小题，每小题5分，共20分)

第1题



中国大学MOOC

(2009预赛，5分) 计算$\iint\limits_D \frac{(x+y)\ln(1+\frac{y}{x})}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_____，

其中区域D是由直线$x+y=1$与两坐标轴所围三角形区域.

解 令$x+y=u, x=v$，则$x=v, y=u-v$

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left|\begin{matrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{matrix}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\left\|\begin{matrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{matrix}\right\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=|-1|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\iint\limits_D \frac{(x+y)\ln(1+\frac{y}{x})}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}\frac{u(\ln u-\ln v)}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,\quad D'\text{：}0\le u\le 1,0\le v\le u$$

计算$\iint\limits_D \frac{(x+y)\ln(1+\frac{y}{x})}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_____，$D: x+y=1$与两坐标轴所围三角形区域.

则原式$=\iint\limits_{D'}\frac{u(\ln u-\ln v)}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint\limits_{D'}\frac{u\ln u}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v-\iint\limits_{D'}\frac{u\ln v}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

$$=\int_0^1\frac{u\ln u}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u\int_0^u\mathrm{d}v-\int_0^1\frac{u}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u\int_0^u\ln v\mathrm{d}v=\int_0^1\left(\frac{u^2\ln u}{\sqrt{1-u}}-\frac{u^2\ln u-u^2}{\sqrt{1-u}}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^1\frac{u^2}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u \qquad \text{令}\sqrt{1-u}=t,\ \text{则}u=1-t^2,\mathrm{d}u=-2t\mathrm{d}t$$

$$\text{上式}=-2\int_1^0(1-2t^2+t^4)\mathrm{d}t=\frac{16}{15}$$

一、填空题

(本题共4个小题，每小题5分，共20分)

第2题



中国大学MOOC

(2009预赛, 5分)

设$f(x)$是连续函数，且满足$f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-2$，则$f(x)=$_____.

解　设$A=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，则 $f(x)=3x^2-A-2$,

等式两端积分得　$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2(3x^2-A-2)\mathrm{d}x$

$A=\int_0^2 3x^2\mathrm{d}x-\int_0^2 A\mathrm{d}x-\int_0^2 2\mathrm{d}x$　　$A=x^3\Big|_0^2-2A-4$

$A=4-2A$　　移项解得 $A=\dfrac{4}{3}$

故$f(x)=3x^2-\dfrac{10}{3}$.

一、填空题

(本题共4个小题，每小题5分，共20分)

第3题



中国大学MOOC

(2009预赛，5分)

曲面$z=\frac{x^2}{2}+y^2-2$平行平面$2x+2y-z=0$的切平面方程为_____.

解　曲面在(x_0,y_0,z_0)的切平面的法向量为$(x_0,2y_0,-1)$，

又切平面与与已知平面平行，从而两平面的法向量平行，

所以　$\frac{x_0}{2}=\frac{2y_0}{2}=\frac{-1}{-1}.$　　从而$x_0=2$，$y_0=1$，得$z_0=1.$

故切平面方程为$2(x-2)+2(y-1)-(z-1)=0$，

即　$2x+2y-z-5=0$

一、填空题

(本题共4个小题，每小题5分，共20分)

第4题



中国大学MOOC

(2009预赛, 5分) 设函数$y=y(x)$由方程$xe^{f(y)}=e^{y}\ln 29$确定，其中f具有二阶导数，且$f'\neq 1$，则$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$_____.

解　先求y'.方程两边同时关于x求导得　$e^{f(y)}+xe^{f(y)}f'(y)y'=e^{y}\ln 29\cdot y'$

解得 $y'=\dfrac{e^{f(y)}}{e^{y}\ln 29-xe^{f(y)}f'(y)}=\dfrac{e^{f(y)}}{xe^{f(y)}-xe^{f(y)}f'(y)}=\dfrac{1}{x[1-f'(y)]}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(y')}{dx}=\left(\frac{1}{x[1-f'(y)]}\right)'=-\frac{[1-f'(y)]-xf''(y)\cdot y'}{x^2[1-f'(y)]^2}$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$$

$$=\frac{-1+f'(y)+xy'f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^2}=\frac{f'(y)-1+\dfrac{f''(y)}{[1-f'(y)]}}{x^2[1-f'(y)]^2}=-\frac{[1-f'(y)]^2-f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}.$$

二、（5分）



中国大学MOOC

(2009预赛, 5分) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{\mathrm{e}}{x}}$，其中$n$是给定的正整数.

1^{∞}

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\exp\left[\dfrac{\mathrm{e}}{x}\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)\right]$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}\left[\ln\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}\right)-\ln n\right]}{x}\right\},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}\left[\ln\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}\right)-\ln n\right]}{x}=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}+2\mathrm{e}^{2x}+\cdots+n\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}$$

$$=\frac{\mathrm{e}(1+2+\cdots+n)}{n}=\frac{\mathrm{e}}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}\mathrm{e},\qquad \text{于是原式}=\mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}\mathrm{e}}.$$

三、（15分）



中国大学MOOC

(2009预赛, 15分)

设函数$f(x)$连续，$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，$A$为常数，求$g'(x)$并讨论$g'(x)$在$x=0$处的连续性.

令$u=xt$，则$\mathrm{d}t=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}u$

解　$g(0)=\int_0^1 f(0)\mathrm{d}t=f(0)=0$，　由题设$f(0)=0$，

令$u=xt$，得　$g(x)=\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}$，$x\neq 0$.

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$$

$x\neq 0$时，$g'(x)=\left(\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}\right)'=\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$，

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

设函数$f(x)$连续，$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，$A$为常数，求$g'(x)$并讨论$g'(x)$在$x=0$处的连续性.

$$g'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2},\quad x\neq 0.$$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$$

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x}-0}{x}$$

$$g(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(0+x)-g(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}.$$

设函数$f(x)$连续，$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，$A$为常数，求$g'(x)$并讨论$g'(x)$在$x=0$处的连续性.

$$\lim_{x\to 0} g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$$

$$=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=g'(0).$$

从而知$g'(x)$在$x=0$处连续.

$$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{A}{2}, & x=0\end{cases}$$

四、（15分）

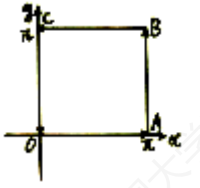


中国大学MOOC

已知平面区域$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\}$,$L$为$D$的正向边界，试证：

(1) $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$;

(2) $\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\ge\frac{5}{2}\pi^2$.



(1) 证法1　直接用对坐标曲线积分的计算法计算.

$$\text{左边}=\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\int_{\overline{OA}}+\int_{\overline{AB}}+\int_{\overline{BC}}+\int_{\overline{CO}}$$

$$=0+\int_0^{\pi}\pi e^{\sin y}dy+\int_{\pi}^{0}(-\pi e^{-\sin x})dx+0=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx,$$

$$\text{右边}=\int_0^{\pi}\pi e^{-\sin y}dy+\int_{\pi}^{0}(-\pi e^{\sin x})dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx,$$

所以　$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$

$$(1)\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x = \oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x;$$

(1) 证法2　根据格林公式，将曲线积分化为区域D上的二重积分

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x = \iint_D (\mathrm{e}^{\sin y} + \mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}\sigma,$$

$$\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x = \iint_D (\mathrm{e}^{-\sin y} + \mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}\sigma,$$

因为D关于$y = x$对称，所以$\iint_D (\mathrm{e}^{\sin y} + \mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}\sigma = \iint_D (\mathrm{e}^{-\sin y} + \mathrm{e}^{\sin x})\mathrm{d}\sigma,$

故　$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x = \oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x.$

已知平面区域$D=\{(x,y)\mid 0\le x\le\pi,0\le y\le\pi\}$,$L$为$D$的正向边界，试证：

(2)$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\ge\frac{5}{2}\pi^2.$

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})d\sigma,$$

(2) $e^t+e^{-t}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\ge 2+t^2$

$$\oint_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})d\sigma=\iint_D(e^{\sin x}+e^{-\sin x})d\sigma$$

$$\ge\iint_D(2+\sin^2 x)d\sigma=2\iint_D d\sigma+\iint_D\sin^2 x d\sigma=2\pi^2+\int_0^{\pi}dy\int_0^{\pi}\sin^2 x dx$$

$$=2\pi^2+\int_0^{\pi}dy\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=2\pi^2+\frac{1}{2}\pi^2=\frac{5}{2}\pi^2.$$

五、（10分）



中国大学MOOC

(2009预赛, 10分)

已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$，$y_2 = xe^x + e^{-x}$，$y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程

分析　根据二阶线性非齐次微分方程解的结构的有关知识，

由题设可知$2y_1 - y_2 - y_3 = e^{2x}$与$y_1 - y_3 = e^{-x}$是相应齐次方程两个线性无关的解，且$xe^x$是非齐次方程的一个特解，因此可以用下述两种解法.

解法1 设此方程式为　$y'' - y' - 2y = f(x)$.　将$y = xe^x$代入上式，得

$$f(x) = (xe^x)'' - (xe^x)' - 2xe^x = 2e^x + xe^x - e^x - xe^x - 2xe^x = e^x - 2xe^x,$$

因此所求方程为$y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$.

已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$，$y_2 = xe^x + e^{-x}$，$y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程

分析　根据二阶线性非齐次微分方程解的结构的有关知识，
由题设可知$2y_1 - y_2 - y_3 = e^{2x}$与$y_1 - y_3 = e^{-x}$是相应齐次方程两个线性无关的解，且$xe^x$是非齐次方程的一个特解，因此可以用下述两种解法.

解法2 设 $y = xe^x + C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$是所求方程的通解，

$y' = e^x + xe^x + 2C_1e^{2x} - C_2e^{-x}$，　$y'' = 2e^x + xe^x + 4C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$，

消去C_1，C_2得所求方程为 $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$.

六、（10分）



中国大学MOOC

(2009预赛, 10分)

设抛物线$y=ax^2+bx+2\ln c$过原点，当$0\le x\le 1$时，$y\ge 0$，又已知该抛物线与x轴及直线$x=1$所围成图形的面积为$\frac{1}{3}$，试确定a,b,c，使此图形绕x轴旋转一周而成的旋转体的体积V最小.

解：因抛物线过原点，故$c=1.$　则$y=ax^2+bx$

由题设有　$\int_0^1(ax^2+bx)\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3},$　即$b=\frac{2}{3}(1-a),$

$$V=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1(a^2x^4+2abx^3+b^2x^2)\mathrm{d}x$$

$$=\pi\left(\frac{1}{5}a^2x^5+\frac{1}{2}abx^4+\frac{1}{3}b^2x^3\right)\Big|_0^1=\pi\left(\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}b^2\right)$$

$$V=\pi\int_a^b y^2\mathrm{d}x$$

设抛物线$y=ax^2+bx+2\ln c$过原点，当$0\le x\le 1$时，$y\ge 0$，又已知该抛物线与x轴及直线$x=1$所围成图形的面积为$\frac{1}{3}$，试确定a,b,c，使此图形绕x轴旋转一周而成的旋转体的体积V最小.

把$b=\frac{2}{3}(1-a)$代入得 $V=\pi\left[\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{3}a(1-a)+\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}(1-a)^2\right]$

令 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=\pi\left[\frac{2}{5}a+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}a-\frac{8}{27}(1-a)\right]=0,$ 得$a=-\frac{5}{4}$,

代入b的表达式得$b=\frac{3}{2}$，此时可验证$y=-\frac{5}{4}x^2+\frac{3}{2}x=\frac{1}{4}x(6-5x)\ge 0,(0\le x\le 1)$

又因$\left.\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}a^2}\right|_{a=-\frac{5}{4}}=\pi\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}+\frac{8}{27}\right)=\frac{4}{135}\pi>0$及实际情况，

故当$a=-\frac{5}{4},b=\frac{3}{2},c=1$时，体积最小.

七、（15分）



中国大学MOOC

(2009预赛, 15分)

已知$u_n(x)$满足 $u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x,\quad n=1,2,\cdots$,且$u_n(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{n}$，求函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$之和.

分析　先解一阶常系数微分方程，求出$u_n(x)$的表达式，然后再求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的和.

解　由已知条件可知$u_n'(x)-u_n(x)=x^{n-1}\mathrm{e}^x$,

其通解为 $u_n(x)=\mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}\left(\int x^{n-1}\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^x\left(\dfrac{x^n}{n}+C\right)$.

由条件$u_n(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{n}$，得$C=0$，故$u_n(x)=\dfrac{x^n\mathrm{e}^x}{n}$.　从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x x^n}{n}=\mathrm{e}^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$.

记 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$，其收敛域为$[-1,1)$,

已知$u_n(x)$满足 $u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x$，$n=1,2,\cdots$，且$u_n(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{n}$，求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$之和.

记 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$，其收敛域为$[-1,1)$，

当$x\in(-1,1)$时，有 $s'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\dfrac{1}{1-x}$，

故 $s(x)=\int_0^x\dfrac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln(1-x)$.

当$x=-1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-\mathrm{e}^{-1}\ln 2$.

所以当$-1\le x<1$时，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-\mathrm{e}^x\ln(1-x)$.

八、（10分）



中国大学MOOC

(2009预赛, 10分)

求$x\to 1^-$时，与$\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$等价的无穷大量.

解 $\int_0^{+\infty}x^{t^2}\mathrm{d}t\le\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}\le 1+\int_0^{+\infty}x^{t^2}\mathrm{d}t$,

$$\int_0^{+\infty}x^{t^2}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2\ln\frac{1}{x}}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\ln\frac{1}{x}}}\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$$

故$x\to 1^-$时，与$\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$等价的无穷大量$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$.



END

01

中国大学MOOC