广东省大学生数学竞赛题（经管类）答案

一．**填空题**（本题满分 30 分，每小题 6 分）

1. 2023

2. $\frac{1}{3}$

3. e^2

4. 1

5. $P\ln 2$

二、(10 分)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\arctan x}-e^{\arcsin x}}{\arctan x\ln\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\arctan x-\arcsin x}-1}{x\ln(1+\cos x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-\arcsin x}{x(\cos x-1)}$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-\arcsin x}{x^3}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$$

$$=-\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-(1+x^2)}{x^2}=1$$

三、(12 分)

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{u(x)}}=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right)^{\frac{\alpha(x)}{u(x)}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{u(x)}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\beta(x)\right)^{\frac{1}{v(x)}}=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\beta(x)\right)^{\frac{1}{\beta(x)}}\right)^{\frac{\beta(x)}{v(x)}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{v(x)}}$$

又因为 $\alpha\sim\beta$，$u\sim v$，所以 $\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{u(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{v(x)}$，

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{u(x)}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\beta(x)\right)^{\frac{1}{v(x)}}$$

四、(12 分)

记 $S(y)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)y^n, y\in(-1,1),$

$$S(y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}ny^{n+1}\right)'=\left(y^2\sum_{n=1}^{\infty}ny^{n-1}\right)'=\left(y^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}y^n\right)'\right)'$$

$$=\left(y^2\left(\frac{1}{1-y}-1\right)'\right)'=\frac{2y}{(1-y)^3}$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)\sin^n x=\frac{2\sin x}{(1-\sin x)^3}.$

五、(12 分)

设 $g(x)=x\int_1^x f(t)dt$，则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续、在 $(0,1)$ 内可导，

又 $g(0)=0=g(1)$，所以由罗尔定理知存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $g'(\xi)=0$，

即 $g'(\xi)=\xi f(\xi)+\int_1^{\xi}f(t)dt=0$, 所以 $f(\xi)=\frac{1}{\xi}\int_{\xi}^{1}f(x)dx.$

六、(12 分)

显然 $x_n>0.$

$x_{n+1}=\frac{f^2(x_n)+9}{2f(x_n)}=\frac{1}{2}\left(f(x_n)+\frac{9}{f(x_n)}\right)\geq\sqrt{f(x_n)\cdot\frac{9}{f(x_n)}}=3$ ， 所以$\{x_n\}$有下界.

$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{f^2(x_n)+9}{2x_nf(x_n)}\leq\frac{f^2(x_n)+9}{2f^2(x_n)}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{9}{f^2(x_n)}\right)\leq 1$， 所以$\{x_n\}$单调减少.

所以由单调有界原理知数列$\{x_n\}$收敛. 记 $\lim_{n\to\infty}x_n=a\geq 3$, 则 $a=\frac{f^2(a)+9}{2f(a)}$, 因此

$f^2(a)-2af(a)+9=0$, $f(a)=a\pm\sqrt{a^2-9}$, 由假设条件知 $3\leq a\pm\sqrt{a^2-9}\leq a$, 所以 $a\leq 3$, 从而 $a=3$, 即 $\lim_{n\to\infty}x_n=3.$

七、(12 分)

1）设 A_n 为用于第 n 年提取 $(10+9n)$ 万元的贴现值。则

$A_n=(1+r)^{-n}(10+9n)$

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}A_n=200+9\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+r)^n}$$

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2},S(\frac{1}{1+r})=S(\frac{1}{1.05})=420$ (万元)

故 $A=3980$ (万元)，即至少存入 3980 万元.

2) 若为按连续复利计算，则第 n 年提取 $(10+9n)$ 万元的贴现值为 $(10+9n)e^{-n}$，于是

$$A=19e^{-0.05}+28e^{-0.05\times2}+\cdots+(10+9n)e^{-0.05n}$$

$$=10\frac{e^{-0.05}}{1-e^{-0.05}}+\sum_{n=1}^{\infty}9n(e^{-0.05})^n$$

设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}9nx^n=9\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=9x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=\frac{9}{(1-x)^2},|x|<1$

$$A=10\frac{e^{-0.05}}{1-e^{-0.05}}+e^{-0.05}\frac{9}{(1-e^{-0.05})^2}=3794.29$$