姓名_____ 考场号_____ 座位号_____

密封线

密封线

密封线

第十四届全国大学生数学竞赛初赛补赛试卷

(非数学类, 2022 年)

题号	一	二	三	四	五	六		总分
满分	30 分	14 分	14 分	14 分	14 分	14 分		100 分
得分								

注意：本试卷共六大题，满分 100 分, 考试时间为 150 分钟.

1 所有答题都须写在此试题纸密封线右边, 写在其他纸上无效.

2 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3 当题空白不够, 可写在当页背面, 并注明题号.

得分	
评阅人	

一、填空题(本题满分 30 分，每小题 6 分)

1、 函数 $f(x)=2x^3-6x+1$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},\ 2\right]$ 上的值域为 _____.

2、 设 $x\in(-\infty,+\infty)$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{(n\mathrm{e}^x+i)(n\mathrm{e}^x+i+1)}=$ _____.

3、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2+4xy+e^y=1$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=$ _____.

4、设 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\right\}$，则 $\iint\limits_D(x+y-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ _____.

5、设可微函数 $f(x,y)$ 对任意 u,v,t 满足 $f(tu,tv)=t^2f(u,v)$，点 $P(1,-1,2)$ 位于曲面 $z=f(x,y)$ 上，又设 $f_x'(1,-1)=3$，则该曲面在点 P 处的切平面方程为 _____.

得分	
评阅人	

二、(本题满分 14 分)

设函数 $z=f(u)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上具有二阶连续导数，$u=\sqrt{x^2+y^2}$，且满足 $\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}=x^2+y^2$，求函数 $f(u)$ 的表达式.

省市_____学校_____准考证号_____

姓名_____考场号_____座位号_____

密封线

密封线

密封线

得分	
评阅人	

三、（本题满分 14 分）

设曲线C：$x^3+y^3-\frac{3}{2}xy=0$.

（1）已知曲线C存在斜渐近线，求其斜渐近线的方程；

（2）求由曲线C所围成的平面图形的面积.

得分	
评阅人	

四、（本题满分 14 分）

证明：当$\alpha>0$时，$\left(\frac{2\alpha+2}{2\alpha+1}\right)^{\sqrt{\alpha+1}}>\left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha}\right)^{\sqrt{\alpha}}$.

姓名_____考场号_____座位号_____
密封线
密封线
省市_____学校_____准考证号_____
密封线

得分	
评阅人	

五、(本题满分 14 分)

计算曲线积分

$$I=\oint_{\Gamma}(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z,$$

其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2Rx\\ x^2+y^2=2rx\end{cases}(0<r<R,z\geq 0)$,方向与 z 轴正向符合右手螺旋法则.

得分	
评阅人	

六、(本题满分 14 分)

证明方程 $x=\tan\sqrt{x}$ 有无穷多个正根,且所有正根 $\{r_n\}$ 可以按递增顺序排列为 $0<r_1<r_2<\cdots<r_n<\cdots$,并讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cot\sqrt{r_n}\right)^{\lambda}$ 的收敛性,其中 λ 是正常数.