第十四届全国大学生数学竞赛初赛(补赛)试题

(非数学类，2022 年 12 月 11 日)

一、 填空题**(本题满分 30 分，每小题 6 分)**

（1） 函数 $f(x)=2x^3-6x+1$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},\ 2\right]$ 上的值域为 _____.

（2） 设 $x\in(-\infty,+\infty)$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{(ne^x+i)(ne^x+i+1)}=$ _____.

（3）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2+4xy+e^y=1$ 确定，则 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=$ _____.

（4）设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，则 $\iint\limits_D(x+y-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ _____.

（5）设可微函数 $f(x,y)$ 对任意 u,v,t 满足 $f(tu,tv)=t^2f(u,v)$，点 $P(1,-1,2)$ 位于曲面 $z=f(x,y)$ 上，又设 $f_x'(1,-1)=3$，则该曲面在点 P 处的切平面方程为 _____.

二、(本题满分 14 分) 设函数 $z=f(u)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上具有二阶连续导数，$u=\sqrt{x^2+y^2}$，且满足 $\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=x^2+y^2$，求函数 $f(u)$ 的表达式.

三、(本题满分 14 分) 设曲线 C：$x^3+y^3-\frac{3}{2}xy=0$.

（1）已知曲线 C 存在斜渐近线，求其斜渐近线的方程；

（2）求由曲线 C 所围成的平面图形的面积.

四、(本题满分 14 分) 证明：当 $\alpha>0$ 时，$\left(\frac{2\alpha+2}{2\alpha+1}\right)^{\sqrt{\alpha+1}}>\left(\frac{2\alpha+1}{2\alpha}\right)^{\sqrt{\alpha}}$.

五、(本题满分 14 分) 计算曲线积分

$$I=\oint_\Gamma(y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z,$$

其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2Rx\\ x^2+y^2=2rx\end{cases}(0<r<R,z\ge 0)$，方向与 z 轴正向符合右手螺旋法则.

六、(本题满分 14 分) 证明方程 $x=\tan\sqrt{x}$ 有无穷多个正根，且所有正根 $\{r_n\}$ 可以按递增顺序排列为 $0<r_1<r_2<\cdots<r_n<\cdots$，并讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cot\sqrt{r_n}\right)^{\lambda}$ 的收敛性，其中 λ 是正常数.